

**Die Kopplung von
Bose-Einstein-Kondensaten
in einem optischen Ringresonator**

Diplomarbeit

verfasst von
Christine Gnahm

betreut von
Prof. Dr. Philippe W. Courteille

im
Mai 2010

**Physikalisches Institut
Arbeitsgruppe Quantenoptik
Fakultät für Mathematik und Physik**

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



Was du nicht kennst, das, meinst du, soll nicht gelten?
Du meinst, daß Phantasie nicht wirklich sei?
Aus ihr allein erwachsen künftige Welten:
In dem, was wir erschaffen, sind wir frei.

(Michael Ende)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vereinigung von Bose-Einstein-Kondensaten	4
2.1	Prinzipielle Idee	4
2.2	Theoretisches Modell	6
2.2.1	Der Hamiltonoperator	6
2.2.2	Vereinfachungen	9
2.2.3	Josephsonkontakt	10
2.3	Simulation der gekoppelten Gleichungen	10
2.3.1	Eindimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung	10
2.3.2	Simulationen mit hoher Finesse	12
2.3.3	Simulationen mit niedriger Finesse	14
2.3.4	Simulationen für ein einzelnes Atom	15
3	Experimenteller Aufbau	17
3.1	Rubidium 87	17
3.2	Erzeugung des BECs	18
3.3	Messzyklus	20
3.4	Abbildung beider Hyperfeinzustände	21
4	Der optische Ringresonator	23
4.1	Charakterisierung des Ringresonators	23
4.2	Zweimodenstabilisierung	24
4.3	Finesse	25
4.4	Der freie Spektralbereich	26
4.4.1	Bestimmung des FSR aus transmittierten Resonanzkurven	28
4.4.2	Bestimmung des FSR über ein Pound-Drever-Hall-Signal	31
5	Transfer in den $2, 1\rangle$ - Spinzustand	36
5.1	STIRAP	36
5.1.1	Theorie	36
5.1.2	Experimentelle Schwierigkeiten	39

5.2	Transfer durch zwei Mikrowellenrampen	39
5.2.1	Experimentelle Realisierung	39
5.2.2	Schwingung in der Falle	40
6	Zweiphotonenkopplung	43
6.1	Theorie	43
6.1.1	Atom-Licht-Wechselwirkung und Einphotonen-Rabioszillationen	43
6.1.2	Zweiphotonen-Rabioszillationen	45
6.1.3	Dichtematrix und Blochvektor	47
6.1.4	Ramsey-Methode	49
6.1.5	Breit-Rabi-Formel und Resonanzfrequenz	50
6.1.6	Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz	53
6.2	Charakterisierung	54
6.2.1	Landau-Zener-Rampen	54
6.3	Messungen	56
6.3.1	Resonanzkurven	56
6.3.2	Zweiphotonen-Rabioszillationen	57
6.3.3	Wiederkehrende Rabioszillationen	59
6.3.4	Rabifrequenz der Radioantenne	60
6.3.5	Ramseyexperimente	61
6.3.6	Dephasierung	63
7	Zusammenfassung und Ausblick	65
A	Zeitentwicklung der Feldoperatoren	68
B	Vereinfachung der DGL	70
C	Simulationsverfahren	72
D	Stromstabilisierung	74
	Literaturverzeichnis	76

1 Einleitung

Fünfundzwanzig Jahre ist es mittlerweile her, dass es Theodore Maiman gelang, den ersten optischen Laserblitz zu zünden [Maiman 1960]. Seither hat der Laser eine Vielzahl an Anwendungsgebieten erobert und ist aus unserem täglichen Leben nicht mehr wegzudenken. In CD-Laufwerken und Laserdruckern steht er in unseren Arbeitszimmern, er begegnet uns an der Supermarktkasse und ersetzt den Zeigestock bei Vorträgen. In der Industrie strukturiert er Oberflächen und zerschneidet millimeterdicke Stahlwände wie Butter. Und manch einer kommt dank Laseroperation wieder ohne Brille und Kontaktlinsen aus.

Noch eine andere physikalische Errungenschaft feiert dieses Jahr ein Jubiläum. Allerdings ist sie noch jünger und längst nicht so bekannt wie die allgegenwärtige kohärente Lichtquelle. Im Juni 1995, vor fünfzehn Jahren also, gelang der Gruppe von Eric Cornell am Joint Institute for Laboratory Astrophysics (JILA) in Colorado die Erzeugung und der Nachweis des ersten Bose-Einstein-Kondensats [Anderson *et al.* 1995]. Gut siebzig Jahre hatte es gedauert, bis der von Satyendranath Bose und Albert Einstein vorhergesagte quantenmechanische Phasenübergang experimentell realisiert werden konnte [Bose 1924, Einstein 1924].

Es handelt sich dabei um einen Effekt, in dem sich die statistische Eigenschaft von Bosonen, also Teilchen mit ganzzahligem Spin, manifestiert. Kühlt man ein nicht wechselwirkendes bosonisches Gas unter eine kritische Temperatur, kommt es zu einer makroskopischen Besetzung des quantenmechanischen Energie-Grundzustandes. Diese Situation ist dann erreicht, wenn die einzelnen Atome dichter zusammenkommen als ihre thermische de Broglie-Wellenlänge - wenn also die Wellenfunktionen der einzelnen Teilchen überlappen.

In einem Bose-Einstein-Kondensat sind alle Atome „gleichgeschaltet“ und es kann mit einer einzigen makroskopischen Wellenfunktion beschrieben werden. Dadurch bietet es die Möglichkeit, Quantenmechanik auf makroskopischer Ebene zu betreiben und mit optischen Methoden sichtbar zu machen. Hierin liegen die große Faszination der Bose-Einstein-Kondensate und der derzeitige „Boom“ der Quantenoptik begründet. Sie sind ideale Modellsysteme, an denen alle denkbaren quantenmechanischen Phänomene getestet werden können - und auch getestet werden.

Bose-Einstein-Kondensate sind also kohärente Materiewellen - und besitzen als solche starke Analogien zu kohärenten Photonen bei Lasern. Die Idee, mit einem Strahl kondensierter

Atome einen sogenannten Atomlaser zu bauen, ließ nicht auf sich warten. 1997 wurde das erste Mal eine Art gepulster Atomlaser realisiert [Mewes *et al.* 1997]. Mit Hilfe kurzer Radiofrequenzpulse wurden Atome aus einem Bose-Einstein-Kondensat in einen ungefangenen Hyperfeinzustand ausgekoppelt und durch die Gravitation beschleunigt. Ebenfalls mittels Radiofrequenzkopplung gelang wenig später die Erzeugung eines kontinuierlichen, monoenergetischen Laserstrahls aus kondensierten Atomen [Bloch *et al.* 1999].

In der Folgezeit konnten durch einen neuen Auskoppelmechanismus über Mehrphotonen-Ramanübergänge höhere Intensitäten und eine bessere Kollimation des Laserstrahls erzielt werden [Hagley *et al.* 1999, Robins *et al.* 2006]. Weitere Experimente bewiesen die zeitliche und räumliche Kohärenz des Atomlaser in erster und zweiter Ordnung [Andrews *et al.* 1997, Köhl *et al.* 2001, Öttl *et al.* 2005]. Außerdem gelang es, den Atomstrahl in einen Wellenleiter einzukoppeln und damit dessen Beschleunigung durch die Gravitation zu verhindern [Guerin *et al.* 2006].

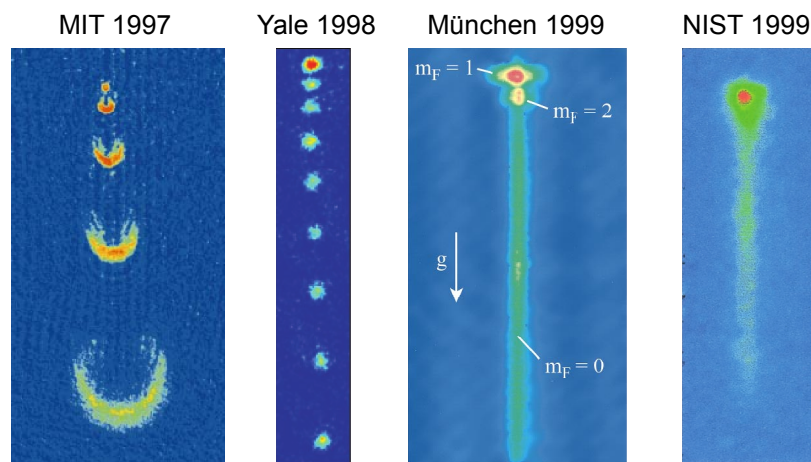


Abbildung 1.1: Bildergalerie der ersten Atomlaser [Ketterle 2002], [Anderson und Kasevich 1998], [Bloch *et al.* 1999] und [Hagley *et al.* 1999].

Der Atomlaser ist ein vielversprechendes Instrument für zukünftige Präzisionsexperimente und Atominterferometrie. Doch bevor es zu solchen Anwendungen kommen kann, muss eine weitere Hürde überwunden werden. Bei den bisher geschilderten Realisierungen wird der Atomlaser aus einem Bose-Einstein-Kondensat gespeist. Ist diese Quelle erschöpft, muss ein neuer experimenteller Zyklus gestartet werden. Daher ist die aktuelle Forschung auf der Suche nach einer Möglichkeit, ein Mutterkondensat mit neuen kondensierten Atomen nachzufüttern und einen wirklich kontinuierlichen Atomlaserstrahl aus ihm auszukoppeln.

Am Massachusetts Institute of Technology (MIT) wurde gezeigt, dass es möglich ist, in einer Nebenkammer erzeugte Kondensate mit einer optischen Pinzette in die Hauptkammer zu transportieren und dort mit einem Mutterkondensat zu verschmelzen [Chikkatur *et al.* 2002]. Außerdem stellten vor zwei Jahren [Robins *et al.* 2008] erstmals eine Methode vor, mit der

ein Bose-Einstein-Kondensat fortlaufend mit neuen Atomen aufgefüllt werden kann, während es gleichzeitig als Quelle eines kontinuierlichen Atomlaserstrahls dient.

Ein Problem bei der Verschmelzung von Bose-Einstein-Kondensaten zur Herstellung kontinuierlicher Atomlaser ist der Phasenunterschied ihrer Wellenfunktionen. Er entsteht immer zwischen zwei unabhängig voneinander produzierten Kondensaten, da die Phase ihrer jeweiligen Wellenfunktion zufällig ist. Untersuchungen zeigten, dass diese Relativphase zum Aufheizen und zur Anregung der Atome führt [Jo *et al.* 2007, Buchmann *et al.* 2009]; außerdem ist bei Anwendungen des Atomlasers eine feste Phase über lange Zeiträume wünschenswert. Aus diesem Grund ist es von großem Interesse, einen Mechanismus zum Ausdämpfen dieser Relativphase zu finden. Laut eines theoretischen Vorschlags von [Jaksch *et al.* 2001] kann diese Dämpfung durch Dissipation über einen Ringresonator erreicht werden.

In Tübingen werden seit 2003 Experimente mit optischen Ringresonatoren hoher Finesse durchgeführt. Seit drei Jahren können außerdem Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten im Ringresonator gemacht werden [Slama 2007]. In der Vergangenheit wurden damit der CARL-Effekt (collective atomic recoil lasing) [Slama 2007, Slama *et al.* 2007] und die Dynamik kalter Atome im nichtresonant betriebenen Resonator [Krenz 2010] untersucht. Nun wollen wir unsere Erfahrung auf diesem Gebiet nutzen, um den Vorschlag von Jaksch *et al.* im Experiment umzusetzen und zwei Bose-Einstein-Kondensate im optischen Ringresonator durch Ausdämpfung ihrer Relativphase zu vereinigen.

Diese Arbeit stellt die ersten experimentellen Erfolge auf diesem Weg vor. Im zweiten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen des Dämpfungsmechanismus erläutert und Simulationen des experimentellen Ablaufs gezeigt. In Kapitel drei werden der experimentelle Aufbau und zeitliche Verlauf des experimentellen Zyklus beschrieben. Die Messungen zur Charakterisierung von Finesse und freiem Spektralbereich des optischen Ringresonators werden in einem eigenen Kapitel 4 präsentiert. Kapitel 5 stellt zwei Verfahren zum Transfer der Atome in den $|F = 2, m_F = 1\rangle$ -Spinzustand vor. Das sechste Kapitel behandelt Zweiphotonenübergänge zwischen den Hyperfeinzuständen $|F = 2, m_F = 1\rangle$ und $|F = 1, m_F = -1\rangle$ und gliedert sich in einen theoretischen und einen experimentellen Teil. Zunächst wird die Theorie der Licht-Atom-Wechselwirkung besprochen und Ramseys Methode oszillierender Felder vorgestellt. Dann wird die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz berechnet und die räumliche Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz abgeschätzt. Als nächstes wird die Rabifrequenz der Mikrowelle mit Hilfe von Landau-Zener-Rampen charakterisiert. Im experimentellen Teil werden die Ergebnisse von Resonanz- und Rabioszillationsmessungen vorgestellt und diskutiert. Anschließend werden Ramseymessungen gezeigt und besprochen. Kapitel 7 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen kurzen Ausblick.

2 Vereinigung von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Ringresonatoren

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zur Vereinigung von Bose-Einstein-Kondensaten (BECs) in einem optischen Ringresonator behandelt. Bevor das theoretische Modell im Detail besprochen und ein Gleichungssystem für die zeitliche Entwicklung der Operatoren aufgestellt wird, erkläre ich die Idee hinter der Messung und das prinzipielle Vorgehen. Im nächsten Abschnitt werden unsere Methode zur Simulation der Gleichungen vorgestellt und die Simulationsergebnisse diskutiert.

2.1 Prinzipielle Idee

Das Experiment zur Vereinigung zweier Bose-Einstein-Kondensate in einem optischen Ringresonator beruht auf einem theoretischen Vorschlag von [Jaksch *et al.* 2001]. Die eigentliche Errungenschaft dieser „ultrakalten Fusion“, als die wir unser Experiment leicht provozierend bezeichnen, ist die Ausdämpfung der relativen Phase, die sich zwischen zwei unabhängig voneinander erzeugten Bose-Einstein-Kondensaten ausbildet. Dabei kann man sich den Ringresonator als Reservoir der Temperatur null vorstellen, das durch Dissipation zur Dämpfung der internen Freiheitsgrade führt.

Ausgangspunkt des Dämpfungszyklus ist ein System aus zwei Bose-Einstein-Kondensaten, die sich am selben Ort, aber in zwei unterschiedlichen Spinzuständen befinden. Als Isotop verwenden wir Rubidium 87, dessen Grundzustand in zwei Hyperfeinstrukturzustände aufspaltet (siehe auch Kapitel 3). Als Spinzustände kommen für das Experiment nur der $|F = 2, m_F = 1\rangle$ - und der $|F = 1, m_F = -1\rangle$ -Zustand in Frage (im Folgenden werden die Zustände $|F = i, m_F = j\rangle$ nur noch mit $|i, j\rangle$ bezeichnet). Sie sind beide „Schwachfeldsucher“ und können magnetisch gefangen werden. Da sie nahezu dieselbe Magnetfeldabhängigkeit besitzen, überlappen die Fallen für beide Zustände räumlich sehr gut. Außerdem ist es möglich, sie über Zweiphotonenprozesse zu koppeln. Das Schema, mit dem die Relativphase der beiden Kondensate gedämpft werden soll, ist in Abbildung 2.1 skizziert.

Die Kondensate werden auf zwei Arten gekoppelt: Zum einen kohärent über einen direkten Zweiphotonenprozess, zum anderen irreversibel über einen angeregten Zustand und den Ringresonator. Für diese Ramankopplung wird die Atomwolke seitlich mit Licht der Frequenz ω_{lf} bestrahlt, das den $|2, 1\rangle$ -Zustand mit einer Verstimmung Δ_{lf} an den angeregten $P_{3/2}$ -Zustand koppelt. Die Frequenz ω_{lf} muss so gewählt werden, dass der anschließende Übergang in den $|1, -1\rangle$ -Zustand nahe einer Resonatorresonanz liegt und durch den Ringresonator stimuliert wird.

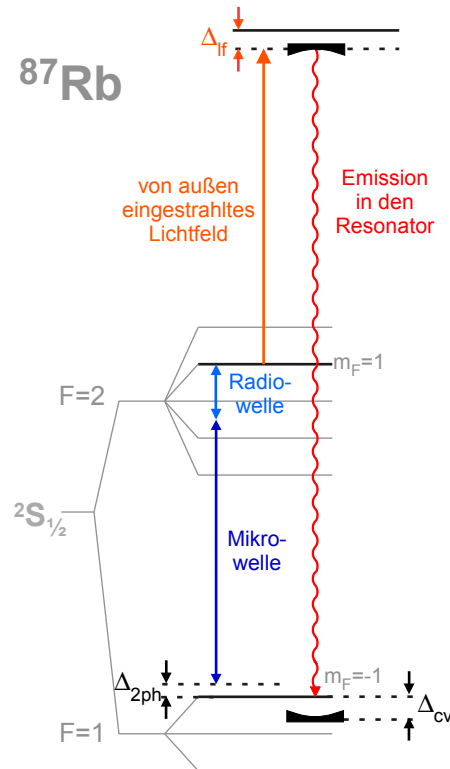


Abbildung 2.1: Schema der ultrakalten Fusion. Die beiden Spinzustände $|1, -1\rangle$ und $|2, 1\rangle$ werden kohärent gekoppelt. Dazu werden gleichzeitig eine Mikrowellen- und Radiofrequenz eingestrahlt. Zusätzlich werden die Atome durch ein äußeres Lichtfeld an einen angeregten Zustand gekoppelt. Von dort zerfallen sie stimuliert durch den Ringresonator in den $|1, -1\rangle$ -Grundzustand. Dieser Ramanübergang ist nicht reversibel.

2.2 Theoretisches Modell

2.2.1 Der Hamiltonoperator

In einer vollständigen theoretischen Beschreibung des Systems müssen bei der Aufstellung des Hamiltonoperators drei Terme berücksichtigt werden: Die Energie der beiden Kondensate, die kohärente Kopplung der Hyperfeinzustände mittels Radio- und Mikrowelle sowie den durch den Resonator stimulierten irreversiblen Ramanübergang.

Um N wechselwirkende Teilchen in einem Fallenpotential V zu beschreiben, benötigt man einen Vielteilchen-Hamiltonoperator. Ohne die Einwirkung äußerer Felder besitzt dieser in zweiter Quantisierung die Form

$$\hat{H}_{VT} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V \right) \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) V_I(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') . \quad (2.1)$$

Dabei sind $\hat{\Psi}(\vec{r})$ und $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ bosonische Feldoperatoren, die ein Teilchen am Ort \vec{r} erzeugen beziehungsweise vernichten. Der Term $\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m}$ liefert die kinetische Energie der Teilchen. Die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen an den Orten \vec{r} und \vec{r}' wird durch deren interatomares Potential $V_I(\vec{r} - \vec{r}')$ vermittelt.

Für große Teilchenzahlen wird eine Lösung der Vielteilchen-Schrödingergleichung unmöglich. Daher wurden Molekularfeldnäherungen entwickelt, die neben einer leichteren Beschreibung auch ein besseres physikalisches Verständnis der Systeme ermöglichen. (Einen guten Review über die Theorie der Bose-Einstein-Kondensation bietet Referenz [Dalfovo *et al.* 1999]).

In stark verdünnten kalten bosonischen Gasen, wie sie in unseren Experimenten vorliegen, wechselwirken die Atome nur über Zweikörper-s-Wellen-Stöße miteinander. Diese Stöße sind unabhängig von der genauen Form des interatomaren Potentials und werden durch einen einzigen Parameter, die s-Wellen-Streulänge, beschrieben. Das Potential kann daher durch einen effektiven Wechselwirkungsterm mit einer Kopplungskonstante u ersetzt werden,

$$V_I(\vec{r} - \vec{r}') = u \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.2)$$

Damit verschwindet eines der Integrale in Gleichung (2.1) und man bekommt einen nichtlinearen Beitrag zur Schrödingergleichung, der von der Atomdichte $\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$ abhängt.

In unserem System betrachten wir zwei Kondensate in verschiedenen Hyperfeinzuständen. Der Hamiltonoperator enthält für jedes Kondensat einen kinetischen Anteil, das Fallenpotential V und einen Wechselwirkungsterm. Der Index der Feldoperatoren in Gleichung (2.5) zeigt an, in welchem der beiden Zustände ein Teilchen erzeugt oder vernichtet wird, $F=1$ oder

F=2. Im Wechselwirkungsterm muss berücksichtigt werden, dass Stöße sowohl innerhalb eines Spinzustandes als auch zwischen den beiden verschiedenen Spinkomponenten auftreten können, wobei die Streulängen jeweils leicht unterschiedlich sind. Zwischen den Kopplungskonstanten u_{kl} und den s-Wellen-Streulängen a_{kl} für die verschiedenen Stoßmöglichkeiten besteht der Zusammenhang

$$u_{kl} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{kl}}{m}. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet k den Gesamtdrehimpuls F des ersten und l den des zweiten Teilchens. Für ^{87}Rb im $^2S_{1/2}$ -Grundzustand betragen die Streulängen $a_{11} = 107 \cdot a_B$, $a_{12} = 104 \cdot a_B$ und $a_{22} = 101 \cdot a_B$, wobei $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.53 \text{ \AA}$ der bohrsche Radius ist.

Die beiden Hyperfeinzustände $|1, -1\rangle$ und $|2, 1\rangle$ können nur durch einen Zweiphotonenübergang gekoppelt werden, da sich die Spinprojektion Δm_F um zwei Einheiten ändern muss. Die kohärente Kopplung der beiden Niveaus wird durch eine kombinierte Mikrowellen- und Radiofrequenz realisiert, die verstimmt zum Zwischenniveau $|2, 0\rangle$ eingestrahlt werden. Bei entsprechenden experimentellen Parametern kann diese Zweiphotonenkopplung als effektive Einphotonenkopplung behandelt werden (Die Zweiphotonenkopplung wird in Kapitel 6 im Detail besprochen.). Sie führt zu Rabioszillationen mit der Frequenz Ω_{2ph} zwischen den beiden Niveaus. Die Verstimmung der Kopplung zur Zweiphotonen-Resonanzfrequenz wird mit Δ_{2ph} bezeichnet. In den Simulationen wird sie meist auf null gesetzt.

Zusätzlich zu der eben beschriebenen kohärenten Kopplung wird ein irreversibler Ramanübergang getrieben. Dabei koppelt das von außen einfallende Lichtfeld zunächst den oberen $|2, 1\rangle$ -Zustand an ein angeregtes Niveau, das dann in den unteren $|1, -1\rangle$ -Zustand zerfällt. Der zweite Übergang wird durch den Ringresonator stimuliert, da seine Frequenz sehr nahe bei einer Resonatorresonanz liegt. Das entstehende Photon wird in diese Resonatormode emittiert. In der Rechnung behandelt man das eingestrahlte Lichtfeld klassisch und beschreibt es durch die Rabifrequenz Ω_{lf} und die Verstimmung zum angeregten Niveau Δ_{lf} .

Das Lichtfeld im Resonator, das durch die beim Zerfall ausgesendeten Photonen entsteht, wird quantenmechanisch (mit Erzeugern und Vernichtern) behandelt. Es wird durch die Kopplungskonstante Ω_{cv} und die Verstimmung zur Resonatorresonanz Δ_{cv} charakterisiert. Wie zuvor kann auch dieser Zweiphotonenübergang als effektive Einphotonenkopplung beschrieben werden. Der Effekt von eingestrahlttem Licht und Resonator wird dabei zu einer gemeinsamen Zweiphotonen-Rabifrequenz oder Kopplungsstärke zusammengefasst,

$$g_{cv} = \frac{\Omega_{lf}\Omega_{cv}}{2\Delta_{lf}}. \quad (2.4)$$

Es ist noch anzumerken, dass der Zerfall über die Resonatormode nicht prinzipiell irreversibel ist. Es spricht nichts dagegen, dass ein in den Resonator emittiertes Photon zu einem späteren

Zeitpunkt wieder absorbiert wird und ein Übergang in umgekehrter Richtung vom $|1, -1\rangle$ - in den $|2, 1\rangle$ -Zustand auftritt. Allerdings ist das Lichtfeld, das sich im Ringresonator aufbaut, durch dessen großes Volumen und den zusätzlichen Zerfall über Resonatorverluste so schwach, dass die Kopplung in überwiegendem Maße von „oben“ nach „unten“ stattfindet.

Nimmt man alle Terme zusammen, so erhält man folgenden Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \int d\vec{r} \hat{\Psi}_1^\dagger \left(\begin{array}{c} \text{Wechselwirkung mit BEC 2} \\ \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + \frac{u_{11}}{2} \underbrace{\hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1}_{=n_1} + \frac{u_{12}}{2} \underbrace{\hat{\Psi}_2^\dagger \hat{\Psi}_2}_{=n_2} \end{array} \right) \hat{\Psi}_1 \\
& + \int d\vec{r} \hat{\Psi}_2^\dagger \left(\begin{array}{c} \text{Wechselwirkung mit BEC 1} \\ \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + \frac{u_{22}}{2} \hat{\Psi}_2^\dagger \hat{\Psi}_2 + \frac{u_{21}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1 \end{array} \right) \hat{\Psi}_2 \\
& + \int d\vec{r} \left(\begin{array}{c} \text{Kopplung der Zustände durch Mikro- \& Radiowelle} \Rightarrow \text{Rabioszillationen} \\ \hbar \Delta_{2ph} \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1 + \frac{\hbar \Omega_{2ph}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_2 + \frac{\hbar \Omega_{2ph}}{2} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger \end{array} \right) \\
& + \int d\vec{r} \left(\begin{array}{c} \text{Kopplung der Zustände durch Lichtfeld und Resonator} \\ \hbar g_{cv} \hat{c} \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_2 + \text{hermitesch konjugiert} \end{array} \right) \\
& + \underbrace{\text{Energie des Lichtfeldes im Resonator}}_{\hbar \Delta_{cv} \hat{c}^\dagger \hat{c}} . \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung der Feldoperatoren $\hat{\Psi}_1$, $\hat{\Psi}_2$ und \hat{c} ist nach den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen durch den Kommutator des Hamiltonoperators mit dem jeweiligen Feldoperator gegeben, $\dot{\hat{\Psi}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\Psi}]$. Die genaue Rechnung kann im Anhang A nachvollzogen werden. Das Ergebnis ist ein System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\Psi}}_1 = & -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{11} |\hat{\Psi}_1|^2 + u_{12} |\hat{\Psi}_2|^2 \right) \hat{\Psi}_1 - i \Delta_{2ph} \hat{\Psi}_1 \\
& - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} \hat{c} \right) \hat{\Psi}_2 \tag{2.6}
\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_2 = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{12} |\hat{\Psi}_1|^2 + u_{22} |\hat{\Psi}_2|^2 \right) \hat{\Psi}_2 - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} \hat{c}^\dagger \right) \hat{\Psi}_1 \tag{2.7}$$

$$\dot{\hat{c}} = -i \int d\vec{r} g_{cv} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger - \left(i \Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) \hat{c} . \tag{2.8}$$

In Gleichung (2.8) wurde von Hand der Term $\frac{\kappa}{2} \hat{c}$ eingeführt. Er beschreibt den exponentiellen Zerfall des Lichtfeldes im Resonator mit der Resonatorzerfallsrate κ , der durch die Transmission der Spiegel und andere Verlustmechanismen zustande kommt.

Im Zuge der Molekularfeldnäherung werden die Feldoperatoren $\hat{\Psi}_k$ und \hat{c} durch komplexe Zahlen ersetzt. Ψ_k wird als Kondensatswellenfunktion bezeichnet, die eine wohldefinierte Phase besitzt und die Bedeutung eines Ordnungsparameters hat. Mit diesem Schritt erhält man ein Gleichungssystem, das mit numerischen Methoden simuliert werden kann.

2.2.2 Vereinfachungen

Um das Gleichungssystem (2.6)-(2.8) in eine einfachere Form zu bringen, wählen wir als Ansatz für die Kondensatswellenfunktionen

$$\Psi_k(\vec{r}) = \sqrt{N_k(t)} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_k(t)}. \quad (2.9)$$

Die gesamte Zeitabhängigkeit steckt in der Besetzungszahl $N_k(t)$ und der als homogen angenommenen globalen Phase $\Phi_k(t)$ des jeweiligen Kondensats. Da beide Kondensate von identischen Fallenpotentialen am gleichen Ort eingeschlossen sind, wählen wir für beide Kondensate dieselbe räumliche Verteilungsfunktion $\varphi(\vec{r})$, die als zeitliche konstant angesetzt wird. Diese erhält man aus den stationären Gleichungen für das System ohne Kopplung durch äußere Lichtfelder,

$$\mu_k \varphi(\vec{r}) = \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{kk} N_k \varphi^2(\vec{r}) + u_{kl} N_l \varphi^2(\vec{r}) \right) \varphi(\vec{r}), \quad (2.10)$$

wobei μ_k das chemische Potential des Kondensats ist. In unseren Simulationen der vollständigen Gleichungen (2.6)-(2.8) bleibt die Form der Kondensatswellenfunktionen während ihrer zeitlichen Entwicklung erhalten. Außerdem scheint die Phasensynchronisation homogen zu verlaufen. Damit rechtfertigen die Simulationen den Ansatz (2.9).

Nun lassen sich Gleichungen für die Änderung der Phasendifferenz und der relativen Besetzung der beiden Hyperfeinzustände herleiten. Die Rechnung befindet sich in Anhang B. Mit den Definitionen

$$\Phi \equiv \Phi_1 - \Phi_2 \quad \text{Relativphase} \quad (2.11)$$

$$P_\Phi \equiv \frac{1}{2} (N_2 - N_1) \quad \text{Relative Besetzung} \quad (2.12)$$

$$N \equiv N_1 + N_2 \quad \text{Gesamtatomzahl} \quad (2.13)$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\dot{\Phi} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\hbar} - \Delta_{2ph} - \frac{4P_\Phi}{\sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2}} \Re e \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{-i\Phi} \right) \quad (2.14)$$

$$\dot{P}_\Phi = -\sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2} \Im m \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{-i\Phi} \right) \quad (2.15)$$

$$\dot{c} = -\frac{i}{2} g_{cv} \sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2} e^{i\Phi} - \left(i\Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) c. \quad (2.16)$$

2.2.3 Josephsonkontakt

Lässt man in den Gleichungen (2.14)-(2.16) den Einfluss des Ringresonators beiseite, erhalten sie die Form

$$\dot{\Phi} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\hbar} - \Delta_{2ph} - \Omega_{2ph} \frac{2P_{\Phi}}{\sqrt{N^2 - 4P_{\Phi}^2}} \cos(\Phi) \quad (2.17)$$

$$\dot{P}_{\Phi} = \frac{1}{2} \Omega_{2ph} \sqrt{N^2 - 4P_{\Phi}^2} \sin(\Phi). \quad (2.18)$$

Dies ist gerade die nichtlineare Version der Gleichungen, mit denen man Josephsonkontakte beschreibt. Der „Josephsonstrom“ besteht dabei aus den Atomen, die von einem Zustand in den anderen wechseln. Die Gleichungen besitzen eine sehr große Ähnlichkeit mit denen, die bei der Behandlung zweier Bose-Einstein-Kondensate im Doppelmuldenpotential auftreten [Smerzi *et al.* 1997].

In [Williams *et al.* 1999] werden die Gleichungen (2.17) und (2.18) genauer untersucht, wobei zusätzlich ein räumlicher Versatz der beiden Kondensate zueinander angenommen wird. Dabei stellen die Autoren fest, dass das Molekularfeld-Potential der beiden Kondensate eine große Auswirkung auf die Dynamik des Systems hat. Wegen der durch das Molekularfeld eingebrachten Nichtlinearitäten stellt die zeitliche Entwicklung der Besetzungszahlen keine gewöhnlichen Rabi-Oszillationen mehr dar.

2.3 Simulation der gekoppelten Gleichungen

2.3.1 Eindimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung

Um die Ergebnisse besser auf unser tatsächliches Experiment übertragen zu können, wollen wir die Gleichungen (2.6)-(2.8) möglichst ohne Näherungen simulieren. Die einzige Vereinfachung, die wir vornehmen, ist die Reduktion der Wellenfunktionen auf eine Dimension.

In unserem Experiment ist das Bose-Einstein-Kondensat in einem zigarrenförmigen Potential gefangen,

$$V = \frac{m}{2} \omega_{\rho}^2 \rho^2 - \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2, \quad (2.19)$$

dessen radiale Fallenfrequenz sehr viel größer als die axiale Fallenfrequenz ist, $\omega_x = \omega_y = \omega_{\rho} \gg \omega_z$. In diesem Fall kann man davon ausgehen, dass in der zeitlichen Entwicklung des Kondensats keine Anregungen in radialer Richtung stattfinden werden, da diese in der Größenordnung $\hbar\omega_{\rho}$ sind und damit viel mehr Energie kosten als axiale Anregungen. Deshalb kann die dreidimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung auf eine Dimension reduziert werden, indem man den radialen Anteil „herausintegriert“ [Bao *et al.* 2003].

Zunächst berechnet man das chemische Potential des Kondensats in drei Dimensionen. Die Dichteverteilung eines Bose-Einstein-Kondensats in Thomas-Fermi-Näherung ist durch sein chemisches Potential μ , die Kopplungskonstante u und das äußere Potential V gegeben:

$$n(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{u}(\mu - V(\vec{r})) & \text{für } \mu > V(\vec{r}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.20)$$

Sie hat die Form einer umgedrehten Parabel und wird dort null, wo das chemische Potential gleich groß wie das Fallenpotential ist. Die Ausdehnung der Wolke in axialer Richtung ist also $z = \sqrt{\frac{2\mu - m\omega_z^2\rho^2}{m\omega_z^2}}$, ihr Radius ist $\rho = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}}$. Da die Dichteverteilung des Kondensats auf die Atomzahl normiert ist, kann man aus ihr das chemische Potential berechnen:

$$N = \int_{n(\vec{r})>0} n(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{n(\vec{r})>0} \frac{1}{u} \left(\mu - \frac{m}{2} \omega_\rho^2 \rho^2 - \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2 \right) d\vec{r} \quad (2.21)$$

$$\mu = \left(\frac{15u}{16\sqrt{2}\pi} N \omega_\rho^2 \omega_z m^{3/2} \right)^{2/5}. \quad (2.22)$$

Je steiler das begrenzende Potential ist, desto flacher wird die Wellenfunktion des eingeschlossenen Kondensats. Daher kann die Wellenfunktion in radialer Richtung näherungsweise als konstante Funktion angenommen werden, $\Psi(\vec{r}) \approx \Phi(z)\Theta(r_{hw} - |x|)\Theta(r_{hw} - |y|)$. Als radiale Ausdehnung des Kondensats nimmt man dabei die Halbwertsbreite der Dichteverteilung, bei der $n(r_{hw}, 0) = \frac{n(0,0)}{2}$. Sie ist

$$r_{hw} = \sqrt{\frac{\mu}{m\omega_r^2}}. \quad (2.23)$$

Die Normierungsbedingung der Wellenfunktion lautet nun

$$\int_{-r_{hw}}^{r_{hw}} \int_{-r_{hw}}^{r_{hw}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \approx (2r_{hw})^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(z)|^2 dz = 1. \quad (2.24)$$

Zur eindimensionalen Form gelangt man, indem man in der Gross-Pitaevskii-Gleichung die Wellenfunktion durch

$$\Psi(\vec{r}) \rightarrow \frac{\Phi(z)}{2r_{hw}}$$

ersetzt. Sie hat dann die einfache Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + N u_{1D} |\Phi(z)|^2 \right) \Phi(z) \quad (2.25)$$

mit $u_{1D} = \frac{u}{(2r_{hw})^2}$. Über die Thomas-Fermi-Näherung kann wiederum das chemische Potential berechnet werden:

$$n = |\Phi(z)|^2 = \frac{\mu - \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2}{u_{1D}} \quad (2.26)$$

$$N = \int_{n(z)>0} n(z) dz = \int_{-\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}}}{\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}}} \frac{\mu - \frac{m}{2}\omega_z^2 z^2}{u_{1D}} dz \quad (2.27)$$

$$\mu = \left(\frac{9}{32} u_{1D}^2 N^2 m \omega_z^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.28)$$

2.3.2 Simulationen mit hoher Finesse

Der Ausgangspunkt unserer Simulationen ist ein Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand. Das Simulationsverfahren wird im Anhang C vorgestellt. Wir simulieren den zeitlichen Ablauf des Experimentes so, wie es später auch tatsächlich stattfinden soll. Um die Dämpfung beobachten zu können, müssen wir die Relativphase zwischen den beiden Kondensatswellenfunktionen messen. Eine gute Möglichkeit hierfür bietet ein Ramseyexperiment, bei dem die Relativphase in eine Besetzungszahldifferenz umgewandelt wird (Zur genauen Erläuterung der Ramseymethode siehe Kapitel 6.1.4.). Hierbei werden die beiden Hyperfeinzustände zunächst durch einen Mikrowellen-Radiofrequenzpuls gekoppelt. Die Pulsdauer wird dabei so gewählt, dass gerade die Hälfte der Atome in den $|1, -1\rangle$ -Zustand transferiert wird und dort ein zweites Kondensat bildet. Ein solcher Puls wird üblicherweise als $\frac{\pi}{2}$ -Puls bezeichnet. Der Grund dafür ist, dass die Entwicklung der Besetzungszahlen bei der Kopplung durch eine Sinusfunktion beschrieben wird, deren Argument bei dieser speziellen Pulsdauer gerade den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt.

Nach dem Transfer sind für eine gewisse Wartezeit alle Kopplungen zwischen den beiden Zuständen ausgeschaltet - in ihr können die Wellenfunktionen der beiden Kondensate dephasieren. Dann werden gleichzeitig die Zweiphotonenkopplung und das äußere Lichtfeld eingeschaltet und die Dämpfung über den Ringresonator findet statt. Zum Schluss wird durch einen zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls der Phasenunterschied der Kondensatswellenfunktionen in eine Besetzungszahldifferenz umgewandelt, die man im Experiment leicht mit Hilfe von Absorptionsabbildungen messen kann.

Unsere Simulationen zeigen, dass die Besetzungen und die Relativphase beim Einschalten der Ramankopplung Oszillationen durchführen, die schließlich ausdämpfen. Wie schnell diese Dämpfung stattfindet und welche Besetzung nach dem zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls vorherrscht, hängt stark von den beteiligten Rabifrequenzen ab. Abbildung 2.2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Besetzungszahlen während des Ramseyzyklus. In dieser Simulation dämpfen die Besetzungszahlen rasch aus, allerdings sind die gewählten Parameter für die Rabifrequenzen mit $\Omega_{2ph} = 2\pi \cdot 4$ kHz und $g_{cv} = 2\pi \cdot 5$ kHz unrealistisch hoch. In Simulationen mit realistischeren Werten, $\Omega_{2ph} = 2\pi \cdot 800$ Hz und $g_{cv} = 2\pi \cdot 1.8$ kHz, findet ebenfalls Dämpfung statt, allerdings führt das System vorher sehr viele Oszillationen durch.

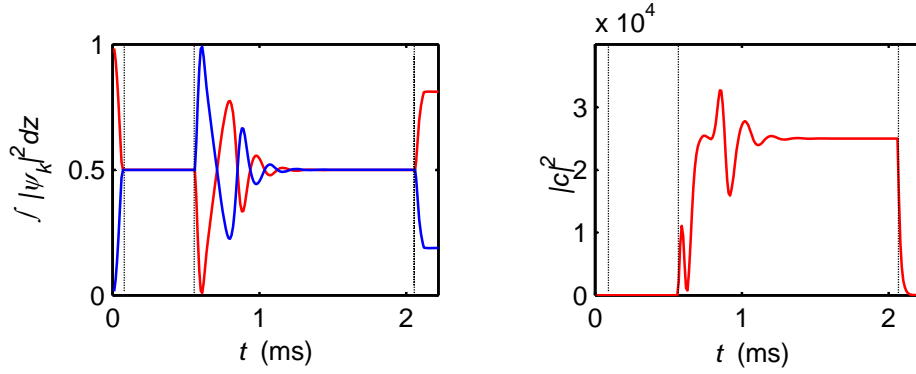


Abbildung 2.2: Entwicklung der Besetzungszahlen und des Resonator-Lichtfeldes während eines Ramseyzyklus. Die einzelnen Abschnitte des Zyklus ($\frac{\pi}{2}$ -Puls, Wartezeit, Dämpfung, $\frac{\pi}{2}$ -Puls) sind durch senkrechte Linien voneinander getrennt. Rot ist der Anteil der Atome im $|2, 1\rangle$ -Zustand, blau derjenige im $|1, -1\rangle$ -Zustand. Simulation bei hoher Finesse mit $\Omega_{2ph} = 2\pi \cdot 4$ kHz und $g_{cv} = 2\pi \cdot 5$ kHz.

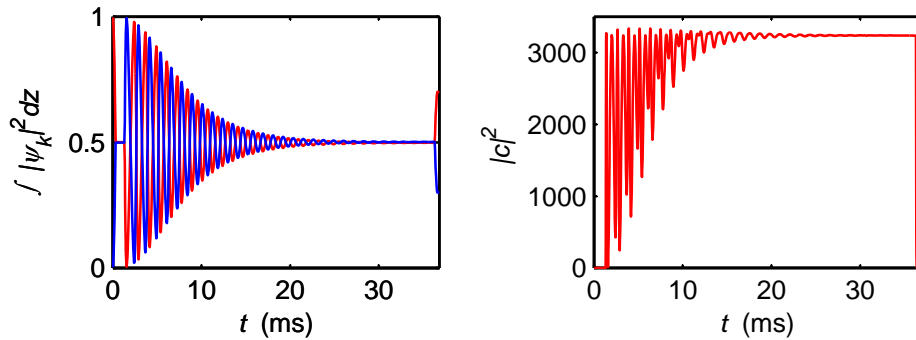


Abbildung 2.3: Entwicklung der Besetzungszahlen und des Resonator-Lichtfeldes während eines Ramseyzyklus bei niedrigen Rabifrequenzen. Zur besseren Sichtbarkeit wurde hier auf eine Unterteilung der einzelnen Abschnitte verzichtet. Rot ist der Anteil der Atome im $|2, 1\rangle$ -Zustand, blau derjenige im $|1, -1\rangle$ -Zustand. Simulation bei hoher Finesse mit $\Omega_{2ph} = 2\pi \cdot 800$ Hz und $g_{cv} = 2\pi \cdot 1.8$ kHz.

Wie in den Abbildungen 2.2 und 2.3 zu sehen ist, spiegelt das Lichtfeld $|c|^2$ im Resonator die Oszillationen und Dämpfung der Relativphase wieder. Damit ist es ein vielversprechendes Messsignal, anhand dessen man in einem einzigen experimentellen Durchlauf die Dämpfung beobachten könnte. Eine Messung der relativen Besetzung hat den Nachteil, dass das Experiment sehr oft wiederholt werden muss, bevor der Dämpfungseffekt erkennbar wird.

Simuliert man ein herkömmliches Ramseyexperiment, das nur aus einem $\frac{\pi}{2}$ -Puls, anschließender Wartezeit und einem erneuten $\frac{\pi}{2}$ -Puls besteht (ohne zwischenzeitliche Kopplung durch den Resonator), so zeigt sich, dass die Wellenfunktionen der beiden Kondensate mit zunehmender Wartezeit dephasieren. Dies führt dazu, dass nach dem zweiten Puls nicht alle Atome in den $|1, -1\rangle$ -Zustand transferiert werden. Schaltet man jedoch die Kopplung über die Radio-Mikrowellenkombination und den Resonator an, nimmt die atomare Verteilung nach dem Ramseyzyklus immer den gleichen Wert an - unabhängig von der Wartezeit. Im linken Teil der Abbildung 2.4 wurde jeder Punkt durch die Simulation einer Wartezeit mit und ohne

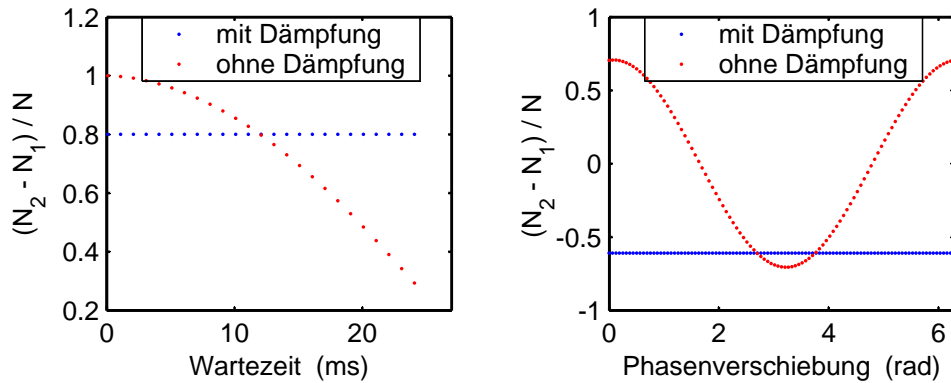


Abbildung 2.4: Endwerte der in Abbildung 2.2 gezeigten Zeitverläufe für die relative Besetzungszahl mit (blau) und ohne (rot) Dämpfung durch den Resonator. Aufgetragen ist die Differenz der Atomzahl im $|2, 1\rangle$ -Zustand N_2 und im $|1, -1\rangle$ -Zustand N_1 , normiert auf die Gesamtatomzahl $N = N_1 + N_2$. Im linken Bild wird die Wartezeit nach dem ersten $\frac{\pi}{2}$ -Puls variiert. In der rechts dargestellten Simulation wird am Ende der Wartezeit eine zusätzliche variable Phase an eine der Wellenfunktionen multipliziert.

Dämpfung erhalten.

Noch deutlicher wird der Effekt der Resonator­dämpfung im rechten Schaubild der Abbildung 2.4. Hier wurden die Simulationen für eine feste Wartezeit durchgeführt. Am Ende der Wartezeit wurde ein künstlicher Phasensprung an eine der beiden Wellenfunktionen multipliziert. Dargestellt wird die relative Besetzungsdifferenz für verschiedene Phasensprünge einmal mit und einmal ohne Dämpfung durch den Resonator. Man sieht deutlich, dass das Ergebnis mit Dämpfung unabhängig vom Phasensprung ist. Die Dämpfung durch den Resonator „löscht“ also die Erinnerung an die Vorgeschichte der Kondensate!

2.3.3 Simulationen mit niedriger Finesse

Je nach Polarisation des Lichtfeldes kann unser Ringresonator bei hoher oder niedriger Finesse betrieben werden (Der Ringresonator wird in Kapitel 4 charakterisiert.). Die bisher vorgestellten Simulationen wurden alle bei hoher Finesse mit der Resonatorzerfallsrate $\kappa = 2\pi \cdot 10$ kHz durchgeführt. Experimentell wäre ein Dämpfungsschema bei niedriger Finesse mit $\kappa = 2\pi \cdot 5.4$ MHz leichter umzusetzen. Jedoch zeigen die Simulationen, dass in diesem Fall die Rabi­frequenz der Resonator­kopplung g_{cv} unrealistisch hoch sein müsste, um eine Dämpfung in machbaren Zeiträumen zu erreichen.

2.3.4 Simulationen für ein einzelnes Atom

Um ein besseres Verständnis für die physikalischen Abläufe zu bekommen, simulieren wir außerdem die vereinfachten Gleichungen für ein einzelnes Atom. Neben der Atom-Atom-Wechselwirkung lassen wir dabei auch alle externen Freiheitsgrade wie kinetische und potentielle Energie beiseite. Die $\hat{\Psi}_k$ sind nun keine Feldoperatoren mehr, sondern die Besetzungsamplituden der elektronischen Anregungen des Atoms. Sie erfüllen jedoch ebenfalls die Kommutatorrelation

$$\left[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.29)$$

wodurch sich die Integrale in den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen auflösen. Man bekommt man das Gleichungssystem

$$\dot{\psi}_1 = -i\Delta_{2ph}\psi_1 - i\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv}c\right)\psi_2 \quad (2.30)$$

$$\dot{\psi}_2 = -i\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv}c^\dagger\right)\psi_1 \quad (2.31)$$

$$\dot{c} = -i\int d\vec{r} g_{cv}\psi_1\psi_2^\dagger - \left(i\Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2}\right)c \quad (2.32)$$

Diese Gleichungen werden mit demselben Verfahren wie zuvor simuliert. Das Ergebnis (siehe Abbildung 2.5) ähnelt verblüffend dem, was man bei der Simulation der vollen Gleichungen für Kondensate erhält. Bei gleichen Parametern ist die Oszillation der Besetzungszahlen in beiden Fällen identisch. Die zeitliche Entwicklung des Resonatorlichtfeldes ist qualitativ ebenfalls ähnlich. Natürlich ist die Photonenzahl im Falle eines einzelnen Atoms sehr viel kleiner.

Bei der Dämpfung der Relativphase der beiden Kondensate handelt es sich also um eine Dämpfung der internen atomaren Freiheitsgrade, das heißt der elektronischen Anregungen des Atoms, die unabhängig vom chemischen Potential der Kondensate ist. Aus unseren Simulationen können wir darum keine Aussage über das Verhalten der atomaren Bewegung, die ein externer Freiheitsgrad ist, treffen. Wir vermuten zwar, dass mit dem beschriebenen Ver-

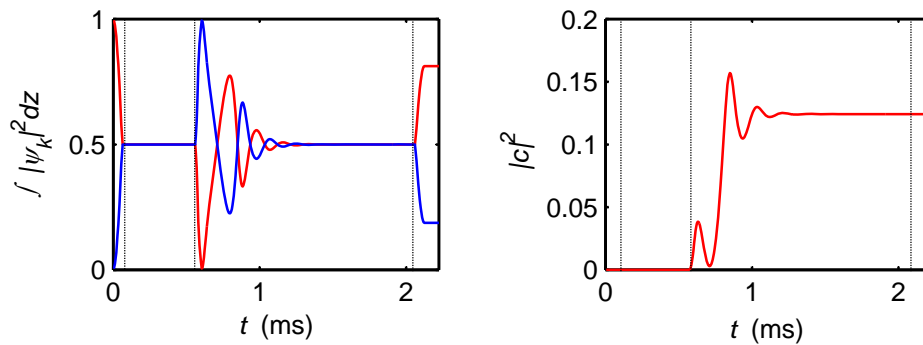


Abbildung 2.5: Simulation für ein einzelnes Atom. Die Parameter sind wie bei Abbildung 2.2.

fahren auch kollektive Anregungen der Kondensate gedämpft werden können, jedoch konnten wir das bisher noch nicht theoretisch zeigen. Die Simulationen weisen darauf hin, dass die Phasensynchronisation über die Ausdehnung der Kondensate homogen verläuft. Es ist jedoch nicht klar, ob auch Phasenstörungen ausgeregelt werden. Um diese Frage genauer zu untersuchen, könnte man Simulationen durchführen, bei denen ein Phasensprung innerhalb einer Kondensatswellenfunktion auftritt.

3 Experimenteller Aufbau

Was wäre ein Experimentalphysiker ohne sein Labor? Dieses Kapitel ist der Anlage gewidmet, die das Realisieren der „ultrakalten Fusion“ erst möglich macht. Dabei werde ich zuerst auf das Element Rubidium 87 eingehen, mit dem wir unsere Experimente durchführen. Anschließend stelle ich die Apparatur vor, mit der wir Bose-Einstein-Kondensate erzeugen und manipulieren und erläutere den Ablauf des experimentellen Zyklus. Zum Abschluss dieses Kapitels schildere ich das Verfahren, das es uns ermöglicht, innerhalb eines Zyklus Atome in beiden Hyperfeinzuständen abzubilden. In vorangegangenen Arbeiten wurde der Aufbau unseres Experiments bereits detailliert vorgestellt, daher werde ich in diesem Kapitel nur eine Übersicht geben. Für eine umfassende Erläuterung der Apparatur und des Lasersystems siehe [Slama 2007], eine genaue Beschreibung des Ringresonators und Ti:Saphir-Lasers befindet sich in [Krenz 2010].

3.1 Rubidium 87

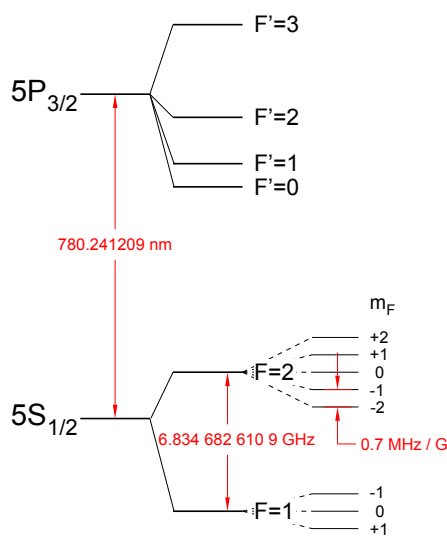


Abbildung 3.1: Hyperfeinstruktur der D_2 -Linie von ^{87}Rb [Steck 2003].

All unsere Experimente werden mit dem Alkaliatom Rubidium 87 durchgeführt. Abbildung 3.1 zeigt das Termschema des D_2 -Übergangs. ^{87}Rb besitzt einen Kernspin von $I = \frac{3}{2}$. Der $5S_{1/2}$ -Grundzustand spaltet daher in zwei Hyperfeinstrukturzuständen mit $F=1$ und $F=2$ auf.

Die potentielle Energie, die Atome im Magnetfeld erfahren, ist proportional zu ihrem magnetischen Moment,

$$V(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}). \tag{3.1}$$

Im schwachen Magnetfeld ist die Projektion m_F des Gesamtdrehimpulses \vec{F} auf die Richtung des Magnetfeldes eine gute Quantenzahl. Sie bestimmt die Aufspaltung der Hyperfeinstrukturzustände in

Zeeman-Spinzustände,

$$V(\vec{r}) = \mu_B \cdot g_F \cdot m_F \cdot B(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Dabei ist $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ das bohrsche Magneton und g_F der Landé-Faktor. Der Grundzustand von ^{87}Rb besitzt einen Landé-Faktor von $g_2 = +\frac{1}{2}$ für den Hyperfeinzustand $F=2$ und $g_1 = -\frac{1}{2}$ für den Hyperfeinzustand $F=1$. Die Magnetfeldabhängigkeit der Unterniveaus ist also in beiden Fällen gleich, allerdings ist das Spektrum für $F=1$ invertiert.

Wir fangen und kühlen die Atome zunächst im $|2, 2\rangle$ -Zustand. Für das Fusionsexperiment brauchen wir jedoch zwei gefangene Zustände in $F=1$ und $F=2$, zwischen denen wir Übergänge treiben können. Daher transferieren wir das Kondensat in den $|2, 1\rangle$ -Zustand und koppeln diesen durch einen Zweiphotonenübergang an den $|1, -1\rangle$ -Zustand. Ein Vorteil bei der Verwendung dieser beiden Niveaus ist, dass sie dieselbe Magnetfeldabhängigkeit besitzen. Im Experiment werden die verschiedenen Übergänge der D_2 -Linie zum Kühlen, Rückpumpen, Umpumpen und Abbilden der Atome genutzt.

3.2 Erzeugung des BECs

Das Erzeugen von ultrakalten Atomen und Bose-Einstein-Kondensaten ist nur im Ultrahochvakuum (UHV) möglich, da jeder Stoß mit einem Restgasatom die kalten Atome aufheizt. Unser Experiment ist aus zwei Vakuumkammern aufgebaut, die über eine differentielle Pumpstrecke verbunden sind. In der kleineren Kammer befinden sich Dispensoren, aus denen ^{87}Rb -Atome verdampft werden, welche dann als kalter Strahl in die Hauptkammer gelangen. Während dadurch der Druck in der kleinen Kammer mit 10^{-7} mbar relativ hoch ist, kann in der Hauptkammer ein Druck von wenigen 10^{-11} mbar aufrecht erhalten werden. Dies verhindert, dass sich Rubidium-Atome auf dem optischen Ringresonator, der sich als Herzstück des Experiments in der Hauptkammer befindet, niederschlagen und seine Finesse herabsetzen. Außerdem erleichtert ein guter Druck das Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation. In Abbildung 3.2 ist unsere Apparatur zur Erzeugung ultrakalter Atome schematisch dargestellt.

Um die ^{87}Rb -Atome in der kleineren Kammer zu fangen und als kalten Strahl in die Hauptkammer zu transportieren, verwenden wir eine zweidimensionale magneto-optische Falle (2D-MOT). Ein Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration erzeugt einen magnetischen Einschluss der Atome in radialer Richtung, während entlang der Achse zur Hauptkammer das Magnetfeld null ist. Durch elliptische Laserstrahlen, die rotverstimmt zur atomaren Resonanz sind, werden die Atome aus vier Raumrichtungen dopplergekühlt. Senkrecht dazu wird der sogenannte Pushbeam eingestrahlt, der die Atome durch Strahlungsdruck in Richtung der Hauptkammer beschleunigt. So wird ein kontinuierlicher kalter Atomstrahl erzeugt, der durch

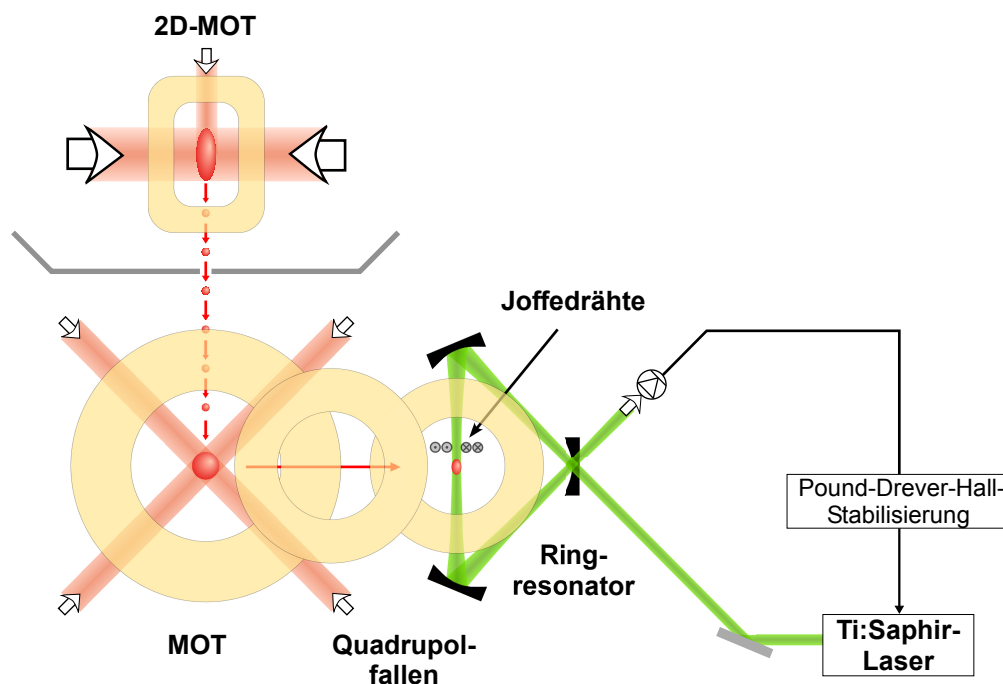


Abbildung 3.2: Schematischer Aufbau unseres Experiments von oben: In der 2D-MOT oben im Bild wird ein kalter Atomstrahl erzeugt, der über eine differentielle Pumpstrecke in die Hauptkammer gelangt. Dort belädt er eine MOT. Von ihr werden die Atome in eine rein magnetische Quadrupolfalle geladen und über zwei weitere Magnetspulenpaare in die Joffefalle rechts im Bild transferiert. Hier werden die Atome evaporativ bis zum BEC gekühlt. Durch einen vertikalen und horizontalen Versatz der Falle gelangt das BEC in die Resonatormode (siehe hierzu auch Anhang D). Der Ti:Saphir-Laser wird über eine Pound-Drever-Hall-Regelung auf die Resonanz der TEM₁₁-Mode stabilisiert.

die differentielle Pumpstrecke in die Hauptkammer gelangt. Dort beladen die Atome eine gewöhnliche dreidimensionale magneto-optische Falle (MOT), die aus sechs rotverstimmten Laserstrahlen aus allen Raumrichtungen sowie einem Magnetspulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration besteht, und werden weiter dopplergekühlt.

Nach der MOT-Phase wird die Atomwolke in den Zeeman-Zustand $|2, 2\rangle$ umpumpt und in eine rein magnetische Quadrupolfalle desselben Spulenpaares umgeladen. Durch passendes Ein- und Ausschalten der Ströme verschieben wir die Atome räumlich über zwei weitere Quadrupolspulen und transferieren sie in eine Joffefalle. Diese besteht aus dem Magnetfeld von vier Joffedrähten, das dem Magnetfeld eines Quadrupolspulenpaares überlagert wird. Das entstehende Fallenpotential besitzt an seinem Minimum einen von null verschiedenen Magnetfeldoffset, um Majorana-Spin-Flips vorzubeugen. Außerdem ist sein Verlauf in der Nähe des Minimums in guter Näherung harmonisch.

In der Joffefalle wird die Atomwolke evaporativ bis zur Bose-Einstein-Kondensation gekühlt. Dabei koppeln wir die heißen Atome der Wolke über ein eingestrahktes Mikrowellenfeld an den ungebundenen $|1, 1\rangle$ -Zustand. Die verbleibenden Atome thermalisieren durch Zweikörperstöße zu immer tieferen Temperaturen. Bei einer Phasenraumdichte von 2.61 setzt die Bose-

Einstein-Kondensation ein.

Die Joffefalle befindet sich zunächst noch seitlich oberhalb des Resonators. Für das Fusionsexperiment transferieren wir die Atome in die Resonatormode: Mit Hilfe der Quadrupolströme können wir das Zentrum der Falle verschieben und damit die Atome vertikal versetzen. Für die horizontale Verschiebung verwenden wir Kompensationsspulen, die sich außerhalb der Kammer befinden.

Während des experimentellen Zyklus kommt es zu einer Aufheizung der Spulen und Joffedrähte durch ohmsche Wärme, die sich auch auf den Resonator überträgt. Diese Energie wird über einen Kupferstab abgeführt. Dieser ragt aus der Vakuumkammer und ist über ein Drahtgeflecht mit einem Kupfer-Kühlfinger verbunden, der in eine Thermoskanne mit flüssigem Stickstoff taucht. Um Temperaturschwankungen während des Zyklus möglichst gering zu halten, ist außerdem eine aktive Regelung eingebaut, die den Sollwert von -30 °C mit Hilfe eines Heizdrahts am oberen Ende des Kupferstabes aufrecht erhält, an dessen unterem Ende die Resonatorplatte sitzt. Diese Regelung erreicht eine Genauigkeit von $\pm 1\text{ °C}$.

3.3 Messzyklus

Unser Messzyklus beginnt mit einer 15 s langen MOT-Phase, an deren Ende wir etwa $8-9 \cdot 10^9$ Atome in der MOT gefangen haben. Anschließend laden wir die Atome in die Magnetfalle um und transferieren sie in die Joffefalle. Beim Umladen gehen etwa die Hälfte, beim anschließenden Transfer noch einmal etwa 30 % der Atome verloren. In den folgenden 17 s werden die Atome evaporativ gekühlt. Da sie bei der horizontalen Verschiebung an den Ort der Resonatormode aufgeheizt werden, führen wir diese bereits vor den letzten Kühlrampen durch. Das erzeugte Kondensat befindet sich also direkt oberhalb der Resonatormode.

Während der Kühlrampen kommt es zu einer Besetzung des gefangenen $|2, 1\rangle$ -Zustandes durch dipolare Relaxation [Günther 2006]. Diese Atome stören den Kühlprozess, da sie durch Stöße die Atome im $|2, 2\rangle$ -Zustand aufheizen. Zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation ist es daher notwendig, durch 10 ms kurze resonante Pulse zwischen den letzten drei Evaporationsrampen die $|2, 1\rangle$ -Atome zu entfernen.

Im nächsten Schritt wird das Kondensat mit zwei Mikrowellenrampen gezielt in den $|2, 1\rangle$ -Zustand umgeladen (siehe Kapitel 5). Anschließend können die eigentlichen Experimente stattfinden. In dieser Arbeit wird die Zweiphotonenkopplung an den $|1, -1\rangle$ -Zustand mit Rabioszillationen und Ramseymessungen vorgestellt. Für das endgültige Experiment zur ultrakalten Fusion muss das zweite Kondensat im $|1, -1\rangle$ -Zustand erzeugt, beide Kondensate vertikal an den Ort der Mode transferiert und dort das Dämpfungsexperiment durchgeführt werden.

Am Ende des jeweiligen Experiments werden alle Magnetfelder und Laser ausgeschaltet. Nach einer gewissen Flugzeit, in der die Atomwolke frei expandiert und im Gravitationsfeld der Erde nach unten fällt, werden beide Hyperfeinkomponenten durch Absorptionsabbildungen aufgenommen.

3.4 Abbildung beider Hyperfeinzustände

Die Absorptionsabbildung am Ende des Messzyklus ist eines der wichtigsten Messinstrumente unseres Experiments. Neben der Position der Atome liefert sie Aufschluss über Atomzahl, Dichte und Temperatur der Wolke. Nachdem sämtliche Magnetfelder und Laserstrahlen ausgeschaltet wurden, lässt man die Atomwolke in einer gewissen Flugzeit, der sogenannten „time of flight“ (TOF), frei expandieren. Dann werden sie mit resonantem Laserlicht beleuchtet, das von den Atomen teilweise absorbiert wird. Der Abbildungsstrahl wird auf eine CCD-Kamera fokussiert, auf der ein Schattenbild entsteht. Aus der absorbierten Lichtintensität kann die optische Dichte der Atomwolke berechnet werden. Um das Signal der Atome aus dem Hintergrundlicht herausfiltern zu können, werden insgesamt drei Aufnahmen gemacht: Eine mit Atomen und Abbildungslicht, eine ohne Atome mit Abbildungslicht und eine ohne Atome ohne Abbildungslicht. Unser Abbildungslaser ist resonant auf den Übergang $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$.

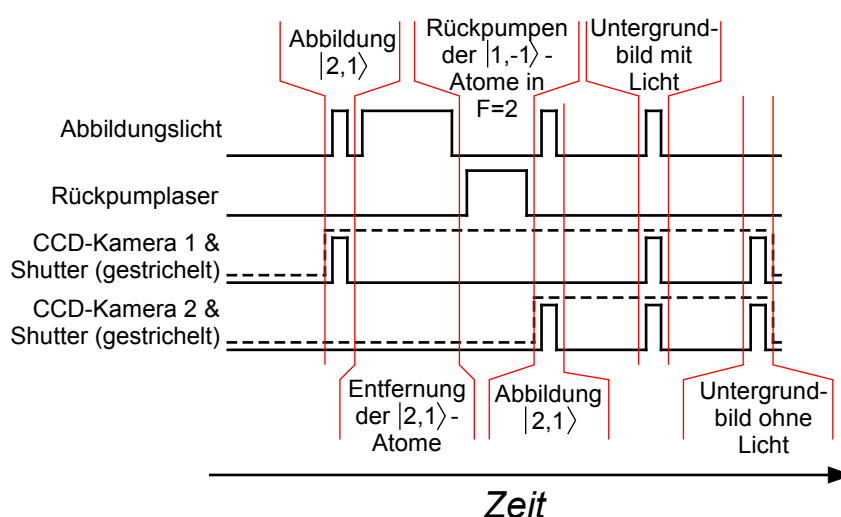


Abbildung 3.3: Zeitlicher Ablauf der Abbildung. Zunächst wird mit CCD-Kamera 1 ein Absorptionsbild der Atome im $|2,1\rangle$ -Zustand aufgenommen. Dann wird das resonante Abbildungslicht erneut eingestrahlt, um die $|2,1\rangle$ -Atome zu entfernen. Mit einem Lichtpuls des Rückpumpasers werden die verbleibenden Atome von $F=1$ nach $F=2$ transferiert, wo sie mit der CCD-Kamera 2 abgebildet werden. Anschließend nehmen beide Kameras ihre Untergrundbilder mit und ohne Licht auf.

Um in einem experimentellen Zyklus die Atome in beiden Hyperfeinzuständen abbilden zu können, verwenden wir zwei CCD-Kameras und teilen das Abbildungslicht in zwei Strahlen

auf. Zunächst bilden wir die $|2, 1\rangle$ -Atome mit einem resonanten Lichtpuls auf der horizontalen Achse ab. Anschließend strahlen wir das Abbildungslicht nochmals für $500 \mu\text{s}$ ein und entfernen damit die $|2, 1\rangle$ -Atome. Nun transferieren wir die $|1, -1\rangle$ -Atome mit einem 2.1 ms langen Rückpumpimpuls in den $|F = 2\rangle$ -Zustand und machen eine Absorptionsabbildung auf der vertikalen Achse. Anschließend nehmen beide Kameras ihre beiden Untergrundbilder mit und ohne Licht auf. In Abbildung 3.3 ist die Pulsabfolge bei der Abbildung der Atome schematisch dargestellt.

Auf diese Weise können wir beide Zustände innerhalb eines Messzyklus fast gleichzeitig abbilden. Die Atome im $|1, -1\rangle$ -Zustand erfahren dabei eine etwa 3 ms längere Expansionszeit.

4 Der optische Ringresonator

Was unser Experiment von anderen Quantenoptiklaboren unterscheidet ist der optische Ringresonator, der in diesem Kapitel vorgestellt wird. Zunächst werde ich seine Eigenschaften näher beschreiben. Im zweiten Abschnitt erkläre ich kurz die Zweimodenstabilisierung, mit der wir die Frequenz des Ti:Saphir-Lasers regeln. Unser Ringresonator zeichnet sich durch seine äußerst hohe Finesse aus, deren Messung im folgenden Abschnitt vorgestellt wird. Der letzte Teil des Kapitels erläutert unsere Messung des freien Spektralbereichs.

4.1 Charakterisierung des Ringresonators

Das Herzstück unseres Experiments ist der optische Ringresonator. Im Gegensatz zu einem linearen Resonator besitzt ein Ringresonator zwei voneinander unabhängige Umlaufrichtungen. Je nachdem, wie der Resonator gepumpt wird, können deshalb sowohl Steh- als auch Laufwellen erzeugt werden. Zwei gekrümmte hochreflektierende Spiegel und ein gekrümmter Einkoppelspiegel bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Umlauflänge von 8.7 cm. Aus der Länge des Resonators lässt sich der freie Spektralbereich (FSR) des Resonators über $\delta_{fsr} = \frac{c}{L}$

grob auf 3.4 GHz abschätzen, c ist dabei die Lichtgeschwindigkeit. Der Krümmungsradius der Hochreflektoren beträgt 500 mm, der des Einkopplers 100 mm. Durch den flachen Auftreffwinkel auf die Spiegel ist das Strahlprofil im Resonator leicht elliptisch. Es bildet sich ein Fokus in der Mitte zwischen den beiden Hochreflektoren. Dort beträgt der Strahlradius $w_0 = 88 \mu\text{m}$ in horizontaler und $w_0 = 117 \mu\text{m}$ in vertikaler Richtung. Die Spiegel besitzen eine unterschiedliche Reflektivität für senkrecht und parallel zur Tischebene polarisiertes Licht, was Einfluss auf die Güte des Resonators hat. Daher kann der Resonator je nach Lichtpolarisation mit hoher (für die s-Polarisation) oder niedriger (im Falle der p-Polarisation) Finesse betrieben werden.



Abbildung 4.1: Foto des Ringresonators vor dem Einbau in die Vakuumkammer

4.2 Zweimodenstabilisierung

Um verschiedene Moden des Ringresonators gezielt ansprechen zu können, ist eine gute Stabilisierung auf seine Resonanz nötig. Da wir keine störungsanfälligen Komponenten wie Piezokristalle in die Vakuumkammer einbringen wollen, stabilisieren wir nicht die Resonatorlänge sondern umgekehrt die Laserfrequenz auf den Resonator. Für frühere Experimente wurde die Methode der Zweimodenstabilisierung entwickelt [Bux 2007]. Sie ermöglicht es, das Licht auch mit einer gezielten Verstimmung zur Resonanz des Resonators einzustrahlen.

Die Ausbreitung von Laserstrahlen wird mathematisch durch die sogenannte gaußsche Strahlenoptik beschrieben [Koglenik und Li 1966]. Das Lichtfeld, das sich in einem optischen Resonator ausbildet, genügt der Wellengleichung. Unter der Annahme, dass sich die Feldamplitude in Ausbreitungsrichtung des Lichts nur wenig ändert, kann diese in paraxialer Näherung als

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2ki \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

geschrieben werden, wobei $\Psi(x, y, z)$ die ortsabhängige Amplitude und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl ist. Diese Differentialgleichung besitzt einen ganzen Satz an Lösungen, die transversale elektromagnetische Moden, kurz TEM-Moden, genannt werden. Sie bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, nach dem jedes Lichtfeld im Resonator entwickelt werden kann. Die gaußsche Grundmode, oder TEM₀₀-Mode, besitzt ein gaußförmiges Intensitätsprofil und ist die für Experimente bevorzugte Mode. Die Intensität der höheren Transversalmoden ist durch die Hermite-Polynome gegeben, die eine gaußförmige Einhüllende modulieren (siehe Abbildung 4.2).

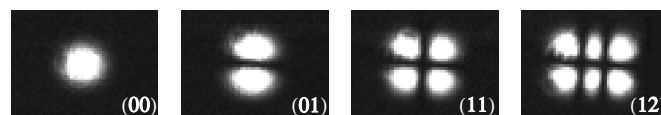


Abbildung 4.2: Intensitätsverteilung niedriger TEM-Moden.

Da höhere Moden eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit besitzen, die Phase nach einem Umlauf im Ringresonator jedoch ein Vielfaches von 2π betragen muss, sind ihre Frequenzen nicht entartet. Diesen Umstand nützen wir bei der Zweimodenstabilisierung aus. Die TEM₁₁-Mode eignet sich besonders gut zur Stabilisierung. Sie besitzt vier Intensitätsmaxima, wobei ihre Intensität gerade dort minimal ist, wo sich das Maximum der TEM₀₀-Mode befindet. Der Frequenzabstand zwischen TEM₁₁- und TEM₀₀-Mode beträgt $2\pi \cdot 163.38$ MHz und ist wellenlängenunabhängig. Nun wird der Ti:Saphir-Laser mit Hilfe einer Pound-Drever-Hall-Regelung auf die TEM₁₁-Mode stabilisiert. Die Atome können dann in das Intensitätsminimum im Zentrum der Mode transferiert und dort gehalten werden, ohne sich durch das Laserlicht zu sehr

aufzuheizen. Um auf diese Weise die Resonanz des Resonators zu kontrollieren, benötigt man nur einen kleinen Teil der Laserintensität. Das restliche Ti:Saphir-Licht kann über einen akustooptischen Modulator (AOM) um $2\pi \cdot 163.38$ MHz frequenzverschoben als TEM₀₀-Mode in den Resonator eingestrahlt werden.

4.3 Finesse

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, die Finesse des Resonators zu bestimmen. Im sogenannten Ring-down-Verfahren [O'Keefe und Deacon 1988] wird die Einkopplung von Licht in den Resonator innerhalb weniger Nanosekunden mit einem AOM ausgeschaltet. Eine schnelle Photodiode nimmt den darauf folgenden exponentiellen Zerfall der Lichtmode im Resonator in Transmission auf. Die Finesse ist über den freien Spektralbereich $\delta_{f_{sr}}$ mit der 1/e-Zerfallszeit τ des Lichtfeldes verknüpft,

$$F = 2\pi \cdot \tau \cdot \delta_{f_{sr}}. \quad (4.2)$$

Das linke Bild von Abbildung 4.3 zeigt eine solche Ring-down-Messung für unseren Resonator bei hoher Finesse. Aus ihr ergibt sich eine Finesse von 135 000 für die p-Polarisation.

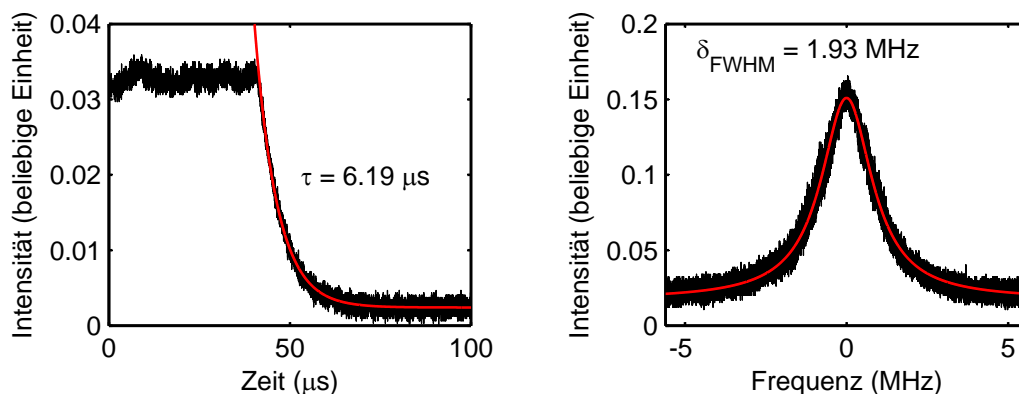


Abbildung 4.3: Bestimmung der Finesse: Das linke Bild zeigt eine Ring-down-Messung bei hoher Finesse. Der exponentielle Fit ergibt als Zerfallszeit $\tau = 6.2 \mu\text{s}$. Das rechte Bild zeigt die Resonanzkurve des Resonators bei niedriger Finesse. Die volle Halbwertsbreite ist $\delta_{FWHM} = 1.93$ MHz

In der Konfiguration mit niedriger Finesse kann die Ring-down-Methode nicht angewandt werden, da das Lichtfeld schneller zerfällt als die Zeitauflösung unserer Photodioden. Daher bestimmen wir die Finesse in diesem Fall durch die Messung der Resonanzkurve. Dazu wird der Ti:Saphir-Laser auf die TEM₁₁-Mode stabilisiert. Mit einem Strahlteiler wird ein Teil des Lichts abgetrennt und seine Frequenz mit Hilfe eines AOMs über die Resonanz der TEM₀₀-Mode durchgestimmt. Indem man das transmittierte Licht mit einer Photodiode misst, nimmt man die eingekoppelte Intensität in Abhängigkeit der Laserfrequenz auf. Eine solche Resonanzmessung in niedriger Finesse ist im rechten Bild der Abbildung 4.3 zu sehen.

Die Resonanz hat die Form einer Lorentzkurve,

$$I(\nu) = I_0 \frac{(\delta_{FWHM}/2)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\delta_{FWHM}/2)^2}, \quad (4.3)$$

mit der vollen Halbwertsbreite δ_{FWHM} . Aus ihr lässt sich die Finesse anhand der Formel

$$F = \frac{\delta_{fsr}}{\delta_{FWHM}} \quad (4.4)$$

bestimmen. Wir messen eine Finesse von 1 790 für die s-Polarisation.

Die volle Halbwertsbreite hängt über $\frac{1}{\tau} = 2\pi \cdot \delta_{FWHM}$ mit der Zerfallszeit zusammen. In unseren Simulationen verwenden wir außerdem die Resonatorzerfallsrate κ , die definiert ist als

$$\kappa = \pi \cdot \delta_{FWHM} = \pi \frac{\delta_{fsr}}{F}. \quad (4.5)$$

Bei hoher Finesse beträgt diese $\kappa_{hF} = 2\pi \cdot 12.7$ kHz, bei niedriger Finesse ist $\kappa_{lF} = 2\pi \cdot 958$ kHz.

4.4 Der freie Spektralbereich

Durch einen glücklichen Zufall ist die Hyperfeinstrukturaufspaltung des Rubidium-Grundzustandes bis auf wenige MHz so groß wie zwei freie Spektralbereiche unseres Ringresonators. Dieser Umstand erleichtert die Realisierung des Fusionsexperimentes erheblich, da wir so die von außen eingestrahlte Lichtfrequenz ω_{lf} einfach mit einem AOM einstellen können. Um sich den Zusammenhang der verschiedenen Frequenzen, die bei der ultrakalten Fusion eine Rolle spielen, klarzumachen, ist das Schema in Abbildung 4.4 hilfreich.

Die kohärente Zweiphotonenkopplung der beiden Zustände wird über eine Mikro- und Radiowellenkombination realisiert. Sie wird in Kapitel 6 im Detail besprochen. Die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz wird im Folgenden mit $\omega_{2ph} = \omega_{mw} + \omega_{rf}$ bezeichnet. Senkrecht zur Resonatormode wird der Ti:Saphir-Laser mit der Frequenz ω_{lf} eingestrahlt, die mit Hilfe eines AOMs eingestellt wird. Es gilt also der Zusammenhang $\omega_{lf} = \omega_{11} - \omega_{aom}$, wobei ω_{11} die Resonanzfrequenz der TEM₁₁-Mode bezeichnet.

Das Ziel ist es, ω_{lf} so einzustellen, dass der folgende Übergang in den $|1, -1\rangle$ -Zustand mit Frequenz ω_{cv} resonant zur TEM₀₀-Mode des Resonators erfolgt. Die Resonanzfrequenz der TEM₀₀-Mode ist um Δ_{TEM} kleiner als die der TEM₁₁-Mode. Da außerdem die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz etwa so groß ist wie zwei freie Spektralbereiche des Resonators, soll gelten

$$\omega_{cv} = \omega_{2ph} + \omega_{lf} \stackrel{!}{=} \omega_{00} + 2\delta_{fsr} = \omega_{11} - \Delta_{TEM} + 2\delta_{fsr}.$$

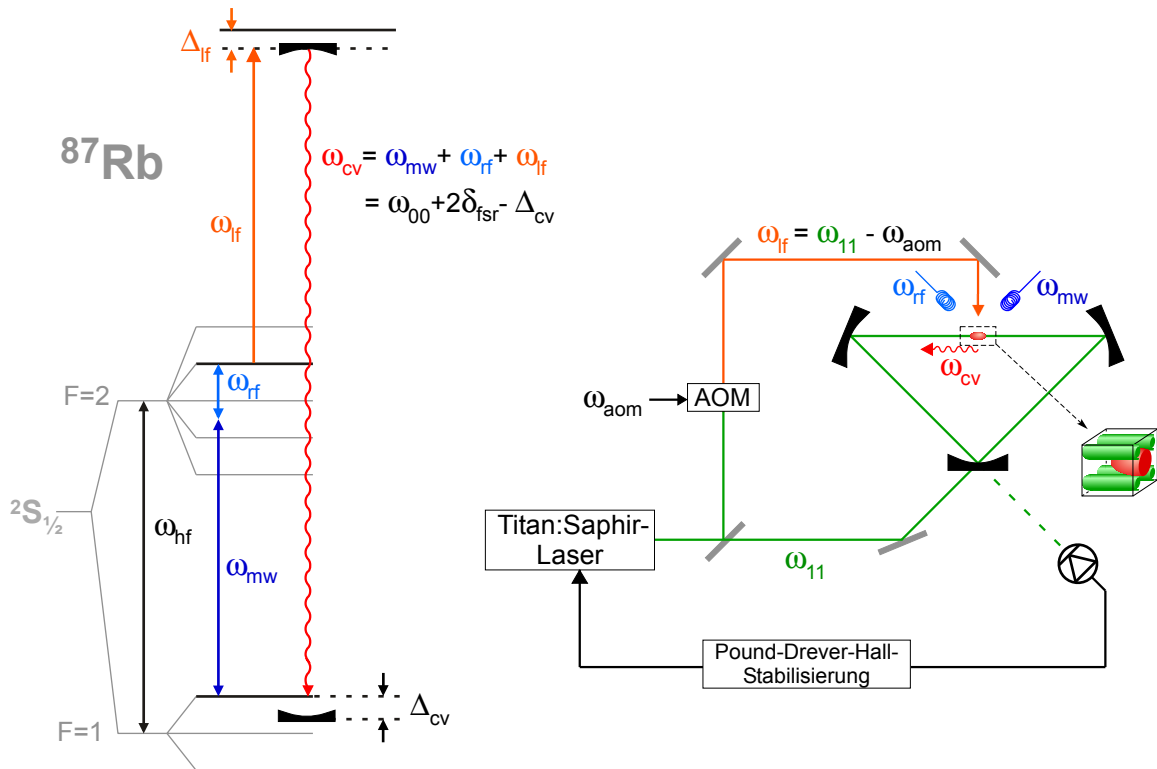


Abbildung 4.4: Schema des Fusionsexperiments. Für die kohärente Kopplung des $|2, 1\rangle$ - und $|1, -1\rangle$ -Zustandes werden eine Mikrowelle mit Frequenz ω_{mw} und Radiowelle mit Frequenz ω_{rf} eingestrahlt. Senkrecht zur Resonatormode wird der Ti:Saphir-Laser mit Frequenz ω_{lf} eingestrahlt, der die Atome an den angeregten Zustand koppelt. Von dort zerfallen sie in den $|1, -1\rangle$ -Grundzustand und emittieren dabei ein Photon der Frequenz ω_{cv} in den Ringresonator. Während des Experiments wird der Laser über eine Pound-Drever-Hall-Frequenzregelung auf die TEM_{11} -Mode des Resonators stabilisiert, in deren Intensitätsminimum die Atome sitzen. Die Frequenz ω_{lf} wird über ein AOM eingestellt.

Die AOM-Frequenz muss also auf den Wert

$$\omega_{aom} = \omega_{2ph} - 2\delta_{fsr} + \Delta_{TEM} \quad (4.6)$$

eingestellt werden. Damit wir diese Frequenz richtig einstellen können, müssen wir den freien Spektralbereich des Resonators sehr gut - wenn möglich auf seine Linienbreite κ genau - kennen. Natürlich kann man ω_{lf} auch so einstellen, dass der anschließende Übergang um Δ_{cv} verstimmt zum Resonator stattfindet.

4.4.1 Bestimmung des FSR aus transmittierten Resonanzkurven

Für die Messung des freien Spektralbereichs benutzen wir einen elektrooptischen Modulator (EOM) des Typs 4851 von New Focus, der bei 6.8 GHz betrieben wird. Der Strahlengang ist in Abbildung 4.5 skizziert. Der Ti:Saphir Laser wird auf eine TEM₁₁-Mode stabilisiert. Ein Teil des Lichts wird mit einem polarisierenden Strahlteilerwürfel abgetrennt und seine Frequenz durch ein AOM, das zweimal durchlaufen wird, verschoben. Damit kann das Licht in Resonanz mit der TEM₀₀-Mode gebracht werden, die bei einer AOM-Frequenz von etwa 81.7 MHz (also 163.4 MHz frequenzverschoben zur TEM₁₁-Mode) liegt. Nach dem AOM passiert der Lichtstrahl das EOM.

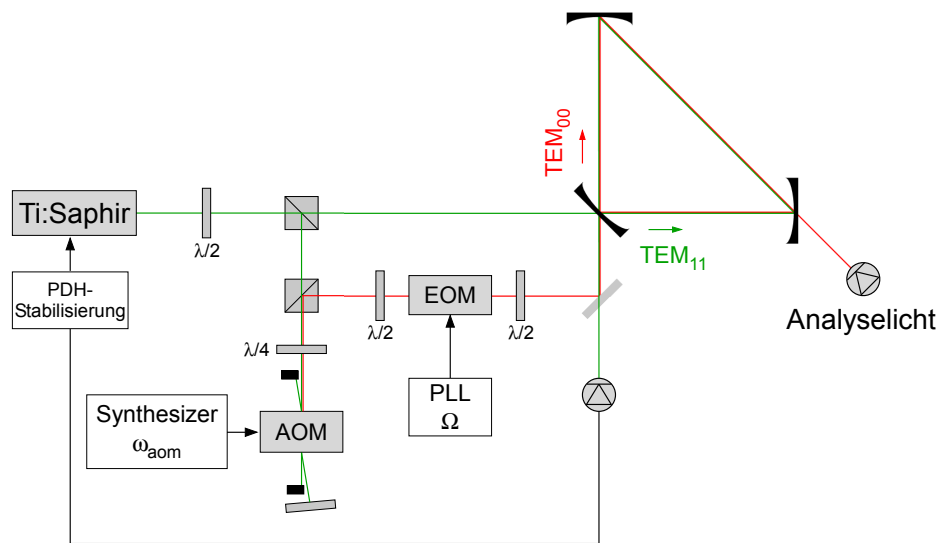


Abbildung 4.5: Vereinfachte Zeichnung des Strahlengangs zur Messung des freien Spektralbereichs. Ein EOM prägt dem Licht Seitenbänder der Frequenz Ω auf. Die Trägerfrequenz wird mit dem AOM über die Resonanz des Resonators gefahren und die transmittierte Leistung mit einer Photodiode gemessen.

Ein EOM moduliert die Phase des elektrischen Feldes der Lichtwelle mit der Frequenz Ω , die von einem lokalen Oszillator (in unserem Fall einem PLL-Synthesizer) auf das EOM gegeben wird. Hat das Licht zu Anfang die Frequenz ω , so hat sein elektrisches Feld hinter dem EOM die Form

$$E = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin(\Omega t))}. \quad (4.7)$$

Dieser Ausdruck kann in Besselfunktionen entwickelt werden. Nimmt man nur die erste Ordnung mit, so erhält man

$$E \approx E_0 \left(J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t} \right). \quad (4.8)$$

Das Licht enthält also drei Frequenzkomponenten: Den Träger bei der ursprünglichen Lichtfrequenz ω sowie zwei Seitenbänder bei den Frequenzen $\omega \pm \Omega$. In unserem Experiment beträgt die Intensität der Seitenbänder etwa 10 % der Trägerintensität.

Um nun den freien Spektralbereich bestimmen zu können, stellen wir mit dem PLL-Synthesizer (LO-45B-680 von AME) einen festen Wert für die Seitenbandfrequenz ein. Dann fahren wir die Trägerfrequenz mit Hilfe des AOMs in einer Rampe so durch, dass wir die Resonanz eines der beiden Seitenbänder mit einer Photodiode aufnehmen können. In Transmission sehen wir die Frequenzen immer modulo δ_{FSR} , daher entspricht der Frequenzabstand der Seitenbänder zum Träger in Transmission gerade dem Abstand der EOM-Frequenz zu $2 \cdot \delta_{FSR}$.

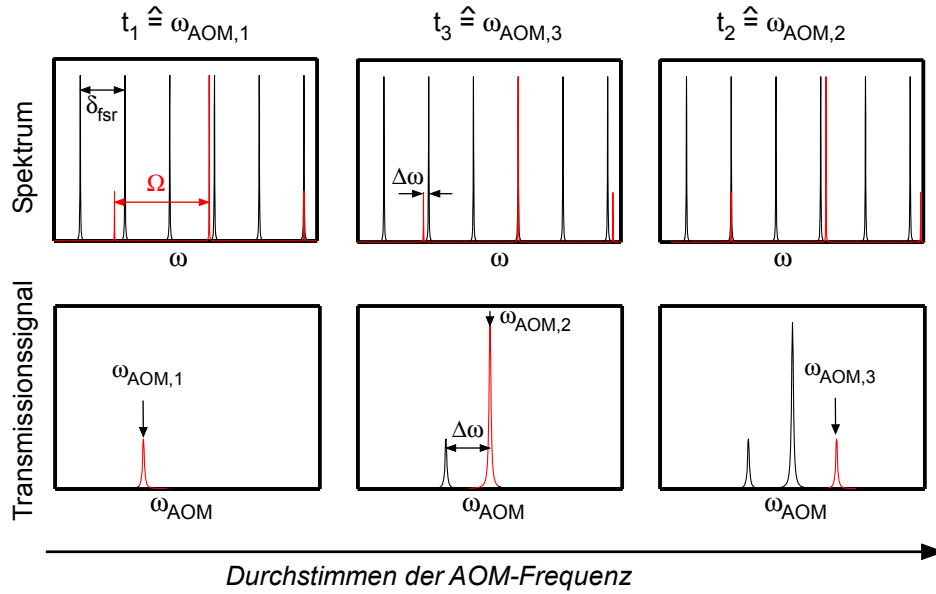


Abbildung 4.6: Prinzip der Messung des freien Spektralbereichs. Von links nach rechts sind drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte beim Durchfahren der Trägerfrequenz mit dem AOM dargestellt. In der oberen Bildreihe ist das Spektrum der TEM₀₀-Resonatormode (schwarz) und des Laserlichts (rot) dargestellt. Durch das Durchstimmen der Trägerfrequenz wird das Laserspektrum über das Resonatorspektrum gefahren. Immer, wenn eine der drei Lichtfrequenzen auf einer Resonatormode zu liegen kommt, wird Licht in den Resonator eingekoppelt und man kann ein Transmissionssignal sehen. Dieses Signal ist in der unteren Bildreihe dargestellt. Ist die EOM-Frequenz um $\Delta\omega$ zum doppelten freien Spektralbereich $2 \cdot \delta_{FSR}$ verstimmt und man fährt die Trägerfrequenz mit dem AOM durch, so erscheinen in Transmission drei Resonanzen (die des Trägers und der Seitenbänder) mit Abstand $\Delta\omega$.

Unsere Messung führen wir wie folgt durch: Wir nehmen für verschiedene Werte der EOM-Frequenz Ω jeweils die Resonanzkurve beider Seitenbänder auf und bestimmen die Resonanzfrequenzen durch einen Lorentz-Fit. Die Differenz der beiden Seitenbandresonanzen ist $2 \cdot (2 \cdot \delta_{FSR} - \Omega) \equiv 2 \cdot \Delta\omega$. Anschließend tragen wir $\Delta\omega$ über der EOM-Frequenz Ω auf und fitten die Messpunkte durch eine Gerade an. Der Nulldurchgang dieser Geraden ist der doppelte freie Spektralbereich. Abbildung 4.6 veranschaulicht das Prinzip der Messmethode. Die Ergebnisse unserer Messung sind in Abbildung 4.7 dargestellt.

In der linearen Regression wird die Summe

$$\sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (4.9)$$

minimiert. In unserem Fall entspricht $x_i \hat{=} \Omega$ der Seitenbandfrequenz und $y_i \hat{=} \Delta\omega_i$ dem zugehörigen Messwert für die Verstimmung. Die Fehler für Steigung a und y -Achsenabschnitt b lassen sich über folgende Formeln abschätzen:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2} \quad (4.10)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.11)$$

$$\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (4.12)$$

$$\Delta b = \Delta y \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (4.13)$$

Der Fehler bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz über einen Lorentz-Fit beträgt maximal ± 10 kHz, daher wurde er bei der Fehlerrechnung vernachlässigt. Wir haben die Messung einmal bei Raumtemperatur (ohne Temperaturstabilisierung) und einmal im laufenden Zyklus mit Temperaturstabilisierung und Stickstoffkühlung durchgeführt. Im ersten Fall erhalten wir als freien Spektralbereich $\delta_{fsr} = 2\pi \cdot (3.4284 \pm 0.00016)$ GHz. Im Zyklus ist er um 2 MHz größer und beträgt $\delta_{fsr} = 2\pi \cdot (3.4304 \pm 0.00012)$ GHz. Das entspricht einer Verkleinerung der Resonatorlänge durch die Stickstoffkühlung um etwa $48 \mu\text{m}$.

Für unser Experiment ist die Genauigkeit der Messung leider noch nicht ausreichend; daher haben wir eine weitere Methode zur Messung des freien Spektralbereichs entwickelt, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

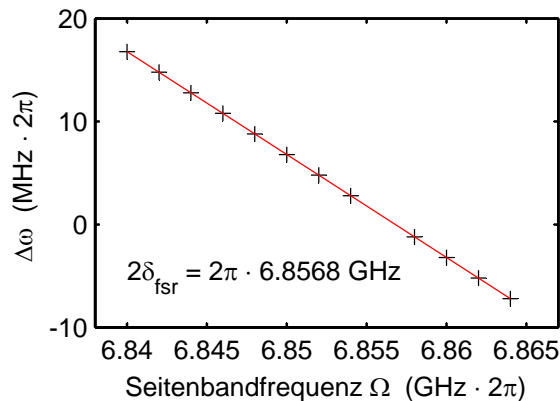


Abbildung 4.7: Bestimmung des freien Spektralbereichs. Aufgetragen ist der Abstand der Seitenbänder vom Träger in Transmission über der EOM-Frequenz. Der Nulldurchgang des linearen Fits gibt $2 \cdot \delta_{fsr}$.

4.4.2 Bestimmung des FSR über ein Pound-Drever-Hall-Signal

Die Idee ist, in Reflexion ein Pound-Drever-Hall-Signal (PDH-Signal) aufzunehmen, das dann verschwindet, wenn die EOM-Frequenz dem freien Spektralbereich entspricht. Der Vorteil dieser Methode ist, dass sie im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen innerhalb weniger Minuten durchgeführt werden kann und darüber hinaus prinzipiell eine Bestimmung des freien Spektralbereichs auf die Linienbreite des Resonators genau ermöglicht. Im Folgenden wird erläutert, wie das Pound-Drever-Hall-Signal zustande kommt und wie wir es benutzen, um den freien Spektralbereich zu messen [Black 2001].

Trifft Licht auf einen Resonator, so wird abhängig von seiner Frequenz ein Teil der Intensität reflektiert. Dieses reflektierte Licht setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: Dem Licht, das direkt am Einkoppelspiegel reflektiert wird bevor es in den Resonator gelangen kann, und dem Lichtanteil, der in den Resonator eingekoppelt wurde, aber wieder aus ihm austritt. Je nach Laserfrequenz ändern sich die Intensität und Phase dieser beiden Lichtfelder und damit auch ihre Überlagerung. Der reflektierte Anteil des einfallenden elektrischen Feldes wird auch als Reflektionskoeffizient bezeichnet und ist

$$F(\omega) = \frac{E_{ref}}{E} = \frac{r \left(e^{2\pi i \frac{\omega}{\delta_{fsr}}} - 1 \right)}{1 - r^2 e^{2\pi i \frac{\omega}{\delta_{fsr}}}}, \quad (4.14)$$

wobei r der Amplitudenreflektionskoeffizient der Spiegel ist. Für resonante Einstrahlung muss die Laserfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches des freien Spektralbereichs δ_{fsr} sein. In diesem Fall verschwindet das reflektierte Licht vollständig - seine beiden Komponenten besitzen gleiche Intensität aber entgegengesetzte Phase und interferieren destruktiv.

Besitzt das Licht, das in den Resonator eingekoppelt wird, nun vom EOM aufgeprägte Seitenbänder (siehe Gleichung (4.8)), so ist das reflektierte elektrische Feld

$$E_{ref} = E_0 \left(F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - F(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t} \right). \quad (4.15)$$

Experimentell ist uns nur die Leistung des Lichts zugänglich, weshalb wir das Betragsquadrat der Formel (4.15) bilden. Bezeichnet man die Leistung des Trägers mit $P_T = |E_0 \cdot J_0(\beta)|^2$ und die der Seitenbänder mit $P_S = |E_0 \cdot J_1(\beta)|^2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |E_{ref}|^2 &= P_T |F(\omega)|^2 + P_S (|F(\omega + \Omega)|^2 + |F(\omega - \Omega)|^2) + 2\sqrt{P_T P_S} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\Re [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \cos(\Omega t) \right. \\ &\quad \left. + \Im [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \sin(\Omega t) \right) \\ &\quad + (\text{Terme, die mit } 2\Omega \text{ oszillieren}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

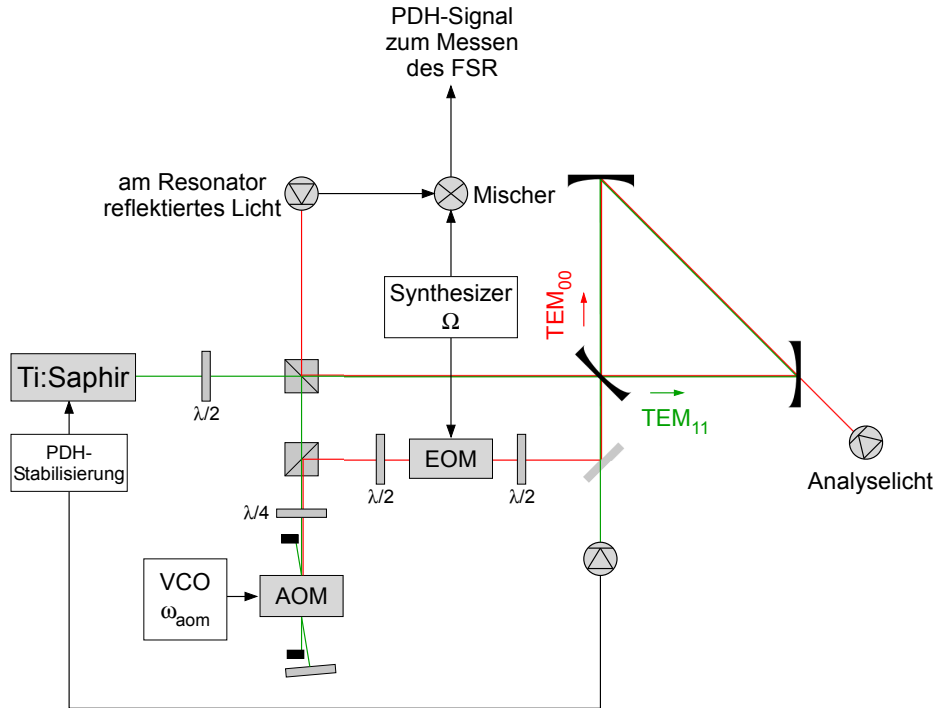


Abbildung 4.8: Aufbau zum Messen des freien Spektralbereichs über ein PDH-Signal. Das EOM prägt dem Laserlicht Seitenbänder auf. Eine schnelle Photodiode detektiert das am Einkoppelspiegel reflektierte Licht, während die Trägerfrequenz mit dem VCO-gesteuerten AOM über die Resonanzfrequenz der TEM_{00} -Mode gefahren wird. Das Signal der Photodiode wird mit der EOM-Frequenz gemischt und durch einen Tiefpass auf ein Oszilloskop gegeben, wo das PDH-Signal detektiert wird.

Dieses Schwebungssignal misst man nun mit einer schnellen Photodiode und vergleicht es über einen Mischer mit der Frequenz des lokalen Oszillators. Der Mischer bewirkt nichts anderes, als die beiden Eingangssignale miteinander zu multiplizieren. Hat das Signal des lokalen Oszillators die Form $A_0 \sin(\Omega t)$, so ergibt sich hinter dem Mischer das Signal

$$\begin{aligned}
 S_M &= A_0 (P_T |F(\omega)|^2 + P_S (|F(\omega + \Omega)|^2 + |F(\omega - \Omega)|^2)) \sin(\Omega t) \\
 &+ \sqrt{P_T P_S} \cdot \left(\Im m [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \right) \\
 &+ (\text{Terme mit } 2\Omega), \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

$$\text{da} \quad \sin(\Omega t) \sin(\tilde{\Omega} t) = \frac{1}{2} \left(\cos((\Omega - \tilde{\Omega})t) - \cos((\Omega + \tilde{\Omega})t) \right) \tag{4.18}$$

$$\text{und} \quad \sin(\Omega t) \cos(\tilde{\Omega} t) = \frac{1}{2} \left(\sin((\Omega - \tilde{\Omega})t) - \sin((\Omega + \tilde{\Omega})t) \right). \tag{4.19}$$

Der Schwebungsterm mit der Frequenz Ω wird also durch das Mischen zu einem Gleichspannungssignal, das mit einem Tiefpass leicht aus dem Gesamtsignal herausgefiltert werden kann. Man erhält damit ein Fehlersignal proportional zu

$$\Im m [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)].$$

Das Beispiel eines solchen Fehlersignals ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Wir wollen dieses Fehlersignal dazu verwenden, unseren freien Spektralbereich zu vermessen. Um zu verstehen, wie wir dazu vorgehen, betrachtet man das Fehlersignal für den Fall, dass die EOM-Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches des freien Spektralbereichs ist, $\Omega = n \cdot \delta_{fsr}$. In diesem Fall wird

$$F(\omega \pm n \cdot \delta_{fsr}) = \frac{r \left(e^{\frac{2\pi i \omega}{\delta_{fsr}}} \cdot e^{\pm 2\pi i n} - 1 \right)}{1 - r^2 e^{\frac{2\pi i \omega}{\delta_{fsr}}} \cdot e^{\pm 2\pi i n}} = F(\omega)$$

und das Fehlersignal verschwindet.

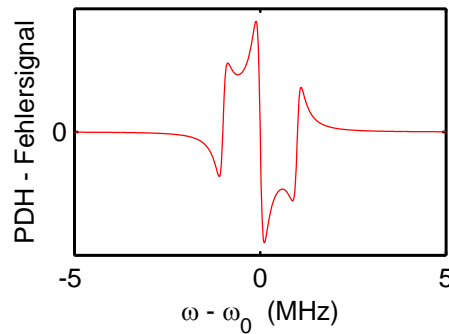


Abbildung 4.9: Typisches PDH-Fehlersignal. Die Trägerfrequenz wird über die Resonanzfrequenz des Resonators ω_0 gefahren.

Um den freien Spektralbereich zu vermessen, gehen wir folgendermaßen vor: Wie bei der vorherigen Messung wird der Ti:Saphir-Laser auf die TEM₁₁-Mode stabilisiert. Der Großteil des Lichts wird über ein AOM, das an einen spannungsgesteuerten Oszillator (VCO) angeschlossen ist und zweimal durchlaufen wird, frequenzverschoben in den Resonator eingekoppelt. Vor der Einkopplung (nach dem AOM) werden mit dem EOM Seitenbänder aufgeprägt, deren Frequenz dieses Mal durch einen Mikrowellensynthesizer (SMR 20 von Rhode&Schwarz) vorgegeben wird. Die Frequenz des Trägers ω wird mit Hilfe des AOMs über die Resonanz der TEM₀₀-Mode gefahren, während Ω gleich bleibt. Das am Resonator reflektierte Licht fällt auf eine schnelle Photodiode (1577-A von New Focus), deren Signal am Mischer (ZMX-8GLH von Mini-Circuits) mit der Seitenbandfrequenz gemischt wird. Das resultierende Pound-Drever-Hall-Signal wird auf ein Oszilloskop gegeben.

Nun kann die EOM-Frequenz am Synthesizer so lange manuell verändert werden, bis sie $2\delta_{fsr}$

	hohe Finesse	niedrige Finesse
Raumtemperatur	$2\pi \cdot (3.428371 \text{ GHz} \pm 3.5 \text{ kHz})$	$2\pi \cdot (3.4285 \text{ GHz} \pm 50 \text{ kHz})$
Mit Stickstoffkühlung	$2\pi \cdot (3.430458 \text{ GHz} \pm 5 \text{ kHz})$	$2\pi \cdot (3.4305 \text{ GHz} \pm 50 \text{ kHz})$

Tabelle 4.1: Ergebnisse für den freien Spektralbereich aus der Messung des PDH-Fehlersignals.

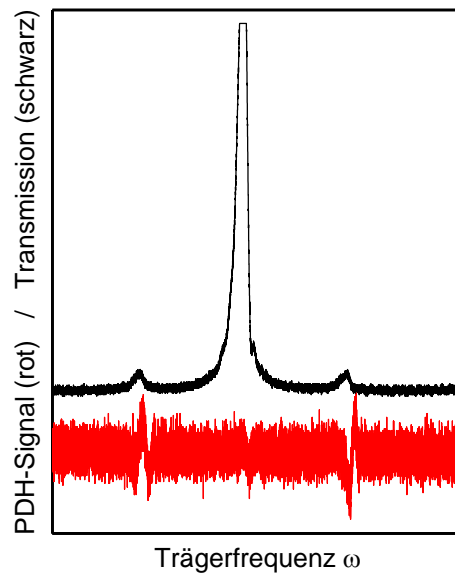


Abbildung 4.10: Pound-Drever-Hall-Fehlersignal (rot) und Transmissionssignal (schwarz) bei einer zum Resonator verstimzten Seitenbandfrequenz. Die Rampe über die Resonanzfrequenz erfolgte innerhalb von $500 \mu\text{s}$. Durch diese schnelle Frequenzänderung weicht die Form der Transmissionskurve von der üblichen Airy-Funktion ab und es treten sogenannte Ringing-Effekte an der rechten Flanke der Resonanz auf [Poirson *et al.* 1997].

beträgt und kein Fehlersignal mehr zu sehen ist. Abbildung 4.10 zeigt ein von uns gemessenes Fehlersignal.

In Tabelle 4.4.2 sind die Messergebnisse zusammengefasst. Der freie Spektralbereich ist im Rahmen der Messgenauigkeit unabhängig von der Wellenlänge und der Leistung des eingekoppelten Lichts. Mit Stickstoffkühlung ist er um etwa $2\pi \cdot 2.1 \text{ MHz}$ größer als bei Raumtemperatur, was einer Verkleinerung der Resonatorlänge um $53 \mu\text{m}$ entspricht. Mit dieser Methode können wir den freien Spektralbereich bei hoher Finesse sehr genau bestimmen. Der angegebene Fehler von $2\pi \cdot 5 \text{ kHz}$ ist sehr konservativ abgeschätzt: Er entspricht der Breite des Frequenzbereichs, in dem am Oszilloskop kein Fehlersignal zu erkennen ist. Als Messwert für den freien Spektralbereich nehmen wir den Mittelwert dieses Frequenzbereiches.

Der Resonator thermalisiert nur langsam. Abbildung 4.11 zeigt die Drift des freien Spektralbereichs über einen Labortag hinweg. Am Tag zuvor wurde die Apparatur mit Stickstoff gekühlt, die Messung selber wurde bei Raumtemperatur durchgeführt. Der Verlauf wird sehr gut durch eine Exponentialfunktion wiedergegeben. Auch während die Apparatur mit Stickstoff gekühlt wird, driftet der freie Spektralbereich leicht und der Resonator ist selbst nach 9 Stunden im laufenden Zyklus noch nicht thermalisiert. Um die Drift zu verhindern, könnte man eine Temperaturstabilisierung für den Resonator bauen. Heizplatten und ein Temperatursensor hierfür sind bereits an die Resonatorgrundplatte im Vakuum angebracht.

Im rechten Schaubild der Abbildung 4.11 ist die Abweichung der einzelnen Messpunkte von

der Exponentialfunktion, die an die Messdaten angepasst wurde, zu sehen. Sie ist deutlich kleiner als der von uns geschätzte Fehler von $2\pi \cdot 5$ kHz. Aus dieser Messung geht hervor, dass wir den freien Spektralbereich mit einer Standardabweichung von nur $2\pi \cdot 550$ Hz bestimmen können.

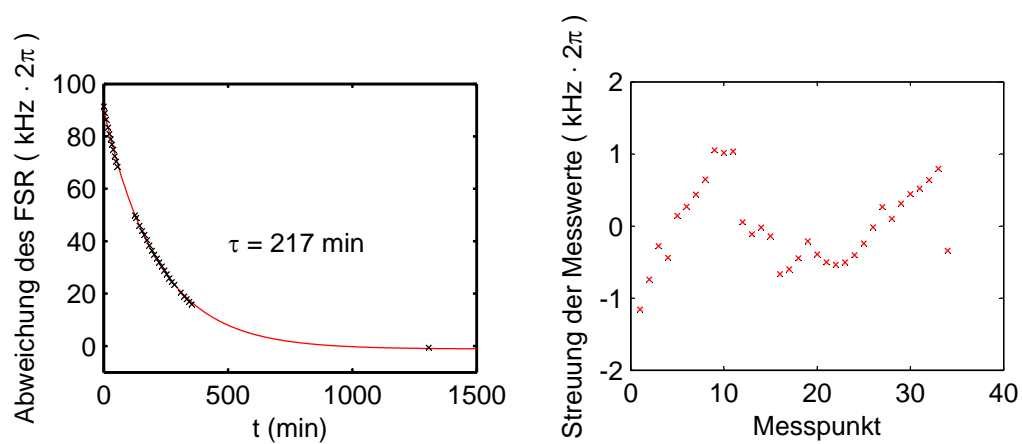


Abbildung 4.11: Im linken Bild ist die wiederholte Messung des freien Spektralbereichs bei hoher Finesse und Raumtemperatur über einen Tag hinweg zu sehen. Die Drift spiegelt die langsame Thermalisierung des Resonators wieder. Das rechte Bild zeigt die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der gefitteten Exponentialfunktion.

5 Transfer in den $|2, 1\rangle$ - Spinzustand

Da in unserem Aufbau das Kondensat zunächst im $|2, 2\rangle$ -Zustand erzeugt wird, der Ausgangspunkt für das Experiment später jedoch ein Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand ist, benötigen wir eine Methode, mit der wir die Atome möglichst verlustfrei vom einen in den anderen Zustand transferieren können. Im Magnetfeld spalten die beiden Hyperfeinstrukturzustände des Rubidium-Grundzustandes $^2S_{1/2}$ in drei ($F=1$) beziehungsweise fünf ($F=2$) in erster Ordnung äquidistante Zeemanniveaus auf. In unserem Experiment beträgt der Abstand dieser Niveaus etwa 1 MHz. Ein direkter Transfer der Atome durch Einstrahlen einer Radiofrequenz bietet sich nicht an, da diese nicht nur den $|2, 2\rangle$ - an den $|2, 1\rangle$ -Zustand, sondern alle Niveaus untereinander koppeln würde. Dadurch würden außer dem $|2, 1\rangle$ -Zustand auch die anderen unangefangenen Niveaus besetzt und Atomzahlverluste wären unvermeidlich.

Dieses Problem können wir umgehen, indem wir Start- und Zielzustand über ein Zwischen-niveau koppeln. Wegen der Auswahlregeln für Dipolübergänge ($\Delta m_F = 0, \pm 1$) ist das einzige mögliche Zwischenniveau der $|1, 1\rangle$ -Zustand. Für die Kopplung an diesen Zustand sind Mikrowellenpulse nötig, da die Hyperfeinaufspaltung des Rubidium-Grundzustandes etwa $2\pi \cdot 6.8$ GHz beträgt. Da der $|1, 1\rangle$ -Zustand magnetisch nicht gefangen ist, soll er möglichst unbesetzt bleiben, um das Aufheizen und den Verlust von Atomen zu verhindern. Eine Möglichkeit wäre die Methode des „Stimulated Raman Adiabatic Passage“ (STIRAP), die im folgenden Abschnitt beschrieben wird. Wegen experimenteller Schwierigkeiten bei der Umsetzung des STIRAP-Prozesses haben wir im Versuch ein anderes Verfahren verwendet, das anschließend geschildert wird.

5.1 STIRAP

5.1.1 Theorie

Die STIRAP-Methode [Bergmann *et al.* 1998] erlaubt einen vollständigen Besetzungstransfer in einem Dreiniveausystem mit Hilfe zweier überlappender Lichtpulse. Das Zwischenniveau bildet bei dem stimulierten adiabatischen Ramanübergang einen Dunkelzustand, der unbesetzt bleibt. In einem Dreiniveausystem, wie es in Abbildung 5.1 zu sehen ist, soll die Popu-

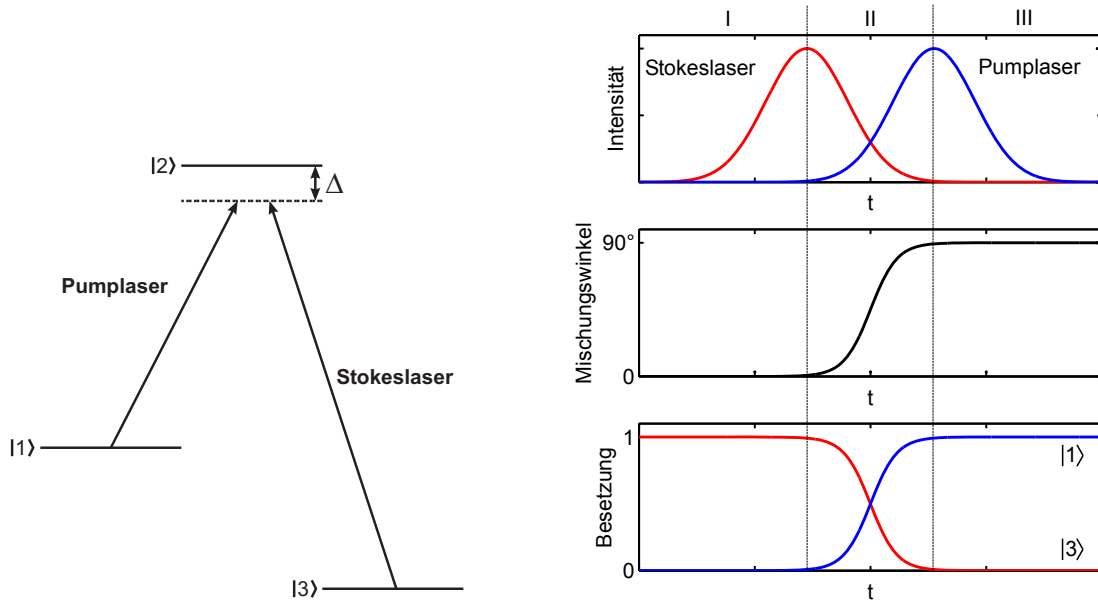


Abbildung 5.1: Schema der Ramanübergänge und der Pulsabfolge beim STIRAP-Prozess

lation des Zustands $|1\rangle$ in Zustand $|3\rangle$ transferiert werden, ohne dass der Zustand $|2\rangle$ besetzt wird.

Um das zu erreichen, müssen zwei Laserpulse in unintuitiver Reihenfolge eingestrahlt werden: Zunächst koppelt ein Lichtpuls des Stokeslasers die noch unbesetzten Zustände $|2\rangle$ und $|3\rangle$ miteinander. Dadurch entsteht eine kohärente Überlagerung dieser beiden Zustände, ohne dass die Atome im Zustand $|1\rangle$ dadurch beeinflusst werden. Wird nun zusätzlich der Pumplaser eingeschaltet, so koppelt er den Zustand $|1\rangle$ an diesen Überlagerungszustand und es bildet sich ein „trapped state“. Aus diesem ist nur eine Besetzung des Zustands $|3\rangle$, nicht aber des Zwischenniveaus $|2\rangle$ möglich.

Damit der Transfer möglich ist, muss die Zweiphotonen-Resonanzbedingung erfüllt sein, das heißt beide Laserfrequenzen müssen dieselbe Verstimmung zum Zwischenniveau $|2\rangle$ besitzen. Wenn die Energieaufspaltung lichtgetriebener Niveaus groß gegenüber der Rabifrequenz und Bandbreite der Laser ist, kann der Prozess in der Rotating Wave Approximation (RWA) beschrieben werden, in der schnelle Oszillationsfrequenzen vernachlässigt werden. Der Hamiltonoperator, der die Kopplung der Niveaus beschreibt, enthält die Rabifrequenzen Ω_S und Ω_P von Stokes- und Pumplaser, sowie die Verstimmung Δ der Laserfrequenzen zum Zwischenniveau $|2\rangle$:

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_P(t) & 0 \\ \Omega_P(t) & 2\Delta & \Omega_S(t) \\ 0 & \Omega_S(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die drei Eigenzustände dieses Hamiltonoperators lauten

$$|\xi^+\rangle = \sin \Theta \sin \Phi |1\rangle + \cos \Phi |2\rangle + \cos \Theta \sin \Phi |3\rangle \quad (5.2)$$

$$|\xi^o\rangle = \cos \Theta |1\rangle - \sin \Theta |3\rangle \quad (5.3)$$

$$|\xi^-\rangle = \sin \Theta \cos \Phi |1\rangle - \sin \Phi |2\rangle + \cos \Theta \cos \Phi |3\rangle \quad (5.4)$$

mit dem Mischungswinkel

$$\tan \Theta = \frac{\Omega_P(t)}{\Omega_S(t)} \quad (5.5)$$

und dem Winkel $\Phi = \Phi(\Omega_S(t), \Omega_P(t), \Delta)$. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\omega^+ = \Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_P^2 + \Omega_S^2} \quad (5.6)$$

$$\omega^o = 0 \quad (5.7)$$

$$\omega^- = \Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_P^2 + \Omega_S^2} . \quad (5.8)$$

$|\xi^+\rangle$ und $|\xi^-\rangle$ sind eine Überlagerung aller drei „nackten“ Zustände, daher wollen wir ihre Besetzung nach Möglichkeit verhindern. Dagegen bietet $|\xi^o\rangle$ eine Möglichkeit, alle Atome verlustfrei vom Zustand $|1\rangle$ in Zustand $|3\rangle$ zu transferieren: Durch experimentelle Beeinflussung des Mischungswinkels Θ kann $|\xi^o\rangle$ so gesteuert werden, dass er von Zustand $|1\rangle$ nach Zustand $|3\rangle$ übergeht.

$$\tan \Theta = \frac{\Omega_P(t)}{\Omega_S(t)} \begin{cases} \text{für } \Omega_P = 0 \Rightarrow \Theta = 0 \Rightarrow |\xi^o\rangle = |1\rangle \\ \text{für } \Omega_S = 0 \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\xi^o\rangle = |3\rangle \end{cases}$$

Das Ziel ist es, diesen Übergang so zu gestalten, dass der Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ des Kondensats zu allen Zeiten parallel zum Eigenzustand $|\xi^o\rangle$ steht. Wenn die Rabi-Frequenzen ausreichend groß sind und die Änderung von $|\xi^o\rangle$ langsam genug stattfindet, kann ihr $|\Psi\rangle$ adiabatisch folgen und sämtliche Atome können in den Zustand $|3\rangle$ transferiert werden, ohne dass $|2\rangle$ besetzt wird.

In Abbildung 5.1 ist die Abfolge der Laserpulse für einen STIRAP-Transfer schematisch dargestellt. Zu Beginn (I) strahlt nur der Stokeslaser ein, der Mischungswinkel Θ ist Null. Sämtliche Atome befinden sich im Ausgangszustand $|1\rangle$, Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ und Eigenzustand $|\xi^o\rangle$ stehen parallel zueinander. Nun wird die Intensität des Stokeslasers langsam reduziert, während gleichzeitig die Intensität des Pumplasers hochgefahren wird (II). Der Mischungswinkel wächst auf 90° an, $|\xi^o\rangle$ und damit $|\Psi\rangle$ drehen sich in einer Ebene senkrecht zum Zustand $|2\rangle$ von $|1\rangle$ nach $|3\rangle$.

5.1.2 Experimentelle Schwierigkeiten

Leider gestaltet sich die Umsetzung des STIRAP-Schemas im Experiment als schwierig: Wir besitzen keine variablen Abschwächer für Frequenzen von 6.8 GHz und können deshalb die Pulse nicht beliebig formen. In einem Power Combiner überlagern wir die Frequenz eines Mikrowellen-Synthesizers (SMR 20 von Rhode&Schwarz; eingestellt auf den Übergang $|2, 2\rangle \rightarrow |1, 1\rangle$) mit der eines PLL-Synthesizers (LO-45B-680 von AME; eingestellt auf den Übergang $|2, 1\rangle \rightarrow |1, 1\rangle$) so, dass sich Ein- und Ausschaltvorgang wie bei STIRAP überlappen. Allerdings können wir nur ein sehr schnelles Ausschalten (in wenigen 100 ns) oder sehr langsames Ausschalten (in 20 ms) über die Wahl der Mikrowellenschalter einstellen - und beide Möglichkeiten liefern keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Daher müssen wir auf einen einfacheren Prozess zurückgreifen.

5.2 Transfer durch zwei Mikrowellenrampen

5.2.1 Experimentelle Realisierung

Eine andere Methode für den Transfer der Atome in den anderen Spinzustand, die in unserem Experiment leichter umzusetzen ist, nimmt eine vorübergehende Besetzung des ungefangenen Zwischenniveaus und die damit verbundene Anregung der Atome in Kauf.

Es werden zwei aufeinanderfolgende Rampen über die Übergangsfrequenzen $\omega_{|2,2\rangle \rightarrow |1,1\rangle}$ und $\omega_{|2,1\rangle \rightarrow |1,1\rangle}$ eingestrahlt. Die Mikrowellenfrequenz wird dabei jeweils in einer 0.8 ms langen Rampe von 0.6 MHz unterhalb der Resonanzfrequenz auf 0.6 MHz oberhalb der Resonanzfrequenz gefahren. Die erste Rampe über $\omega_{|2,2\rangle \rightarrow |1,1\rangle}$ transferiert alle Atome aus dem $|2, 2\rangle$ -Zustand in den ungebundenen $|1, 1\rangle$ -Zustand. Die zweite Rampe, die unmittelbar auf die erste folgt, koppelt die Atome an den $|2, 1\rangle$ -Zustand. Mit diesem Verfahren gelingt es uns, 85 bis 90 % der Atome aus dem $|2, 2\rangle$ -Zustand in den $|2, 1\rangle$ -Zustand zu transferieren, ohne dass die Atome dabei wesentlich aufgeheizt werden.

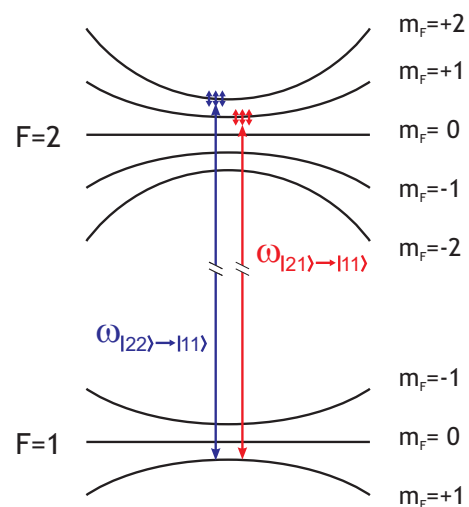


Abbildung 5.2: Schema der Zeeman-Niveaus von ^{87}Rb in der Magnetfalle und ihre Kopplung durch zwei Mikrowellenfrequenzen.

5.2.2 Schwingung in der Falle

Das Fallenpotential der Atome wird durch die Formel

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m_F \cdot \mu_B \cdot B(\vec{r}) \quad (5.9)$$

beschrieben. Die Atome im Spinzustand $|2, 2\rangle$ erfahren im Magnetfeld also einen stärkeren Einschluss als die Atome im Zustand $|2, 1\rangle$. Zusätzlich zu den angelegten Magnetfeldern spüren die Atome auch noch das Gravitationspotential der Erde. Dadurch stimmt die Lage des Magnetfeldminimums nicht ganz mit der Position des Fallenminimums für die Atome überein. Ihre Höhe ist um den sogenannten „gravitational sag“ verschoben. Um ihn zu bestimmen, muss man die Position berechnen, an der die Gravitationskraft gerade durch den Magnetfeldgradienten kompensiert wird, also

$$\frac{dB}{dz} = \frac{m \cdot g}{\mu} \quad (5.10)$$

gilt (g ist die Gravitationskonstante, m die Masse von ^{87}Rb und μ das magnetische Moment). Um das Magnetfeldminimum hat unser Fallenpotential eine harmonische Form und kann in z -Richtung als

$$V(z) = \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2$$

mit der Fallenfrequenz ω_z geschrieben werden. Die Gravitationskraft wird kompensiert für

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dE_{grav}}{dz}. \quad (5.11)$$

Daraus bekommt man den gravitational sag Δz :

$$\begin{aligned} m \cdot \omega_z^2 \cdot \Delta z &= m \cdot g \\ \Rightarrow \Delta z &= \frac{g}{\omega_z^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Durch das unterschiedliche Fallenpotential besitzen die Atome in verschiedenen Spinzuständen auch verschiedene Fallenfrequenzen und damit einen anderen gravitational sag. Die Fallenfrequenz ist proportional zur Wurzel aus der Quantenzahl m_F und damit

$$\omega_z^2 \propto m_F \Rightarrow \Delta z \propto \frac{1}{m_F}.$$

Beim Transfer vom $|2, 2\rangle$ - in den $|2, 1\rangle$ -Zustand ändert sich also die Höhe des Fallenminimums, wodurch die Atome in vertikaler Richtung beschleunigt werden. Durch die Besetzung des $|1, 1\rangle$ -Zustandes erhalten sie außerdem einen zusätzlichen „Kick“ in diese Richtung, so dass die Atomwolke nach dem Transfer stark in der Falle oszilliert. Abbildung 5.3 zeigt die vertikale Position der Atomwolke für verschiedene Haltezeiten nach 0.1 ms Flugzeit (nach

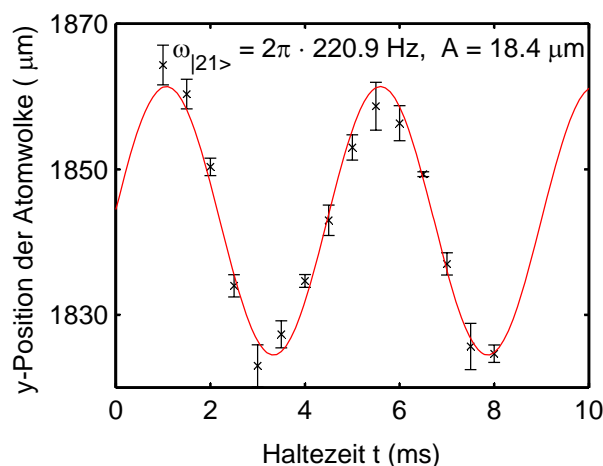


Abbildung 5.3: Schwingung der Atomwolke in der Falle nach dem Transfer in den $|2, 1\rangle$ -Zustand. Aufgetragen ist die vertikale Position der Atome bei verschiedenen Haltezeiten nach einer freien Expansionszeit von 0.1 ms.

einer so kurzen Expansionszeit hat sich die Ortsverteilung der Atome noch nicht in eine Impulsverteilung umgekehrt). Die Wolke oszilliert mit einer Amplitude von fast $20 \mu\text{m}$. Aus der Oszillationsfrequenz $\omega_{|2,1\rangle} = 2\pi \cdot 220.9 \text{ Hz}$ ergibt sich, dass die Atome im $|2, 1\rangle$ -Zustand einen gravitational sag von $\Delta z_{21} = 5.1 \mu\text{m}$ erfahren. Im $|2, 2\rangle$ -Zustand war dieser nur halb so groß.

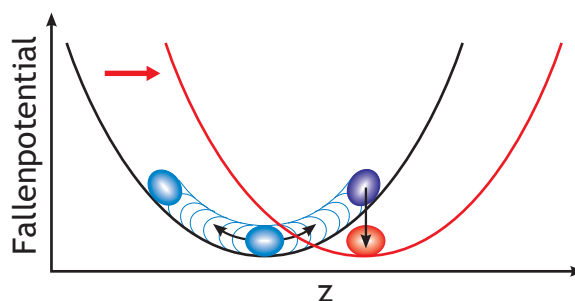


Abbildung 5.4: Veranschaulichung des Verfahrens zum Dämpfen der Schwingung. Wenn die Atome den Umkehrpunkt erreicht haben, wird das Fallenminimum dorthin verschoben.

Um die Schwingung auszdämpfen, warten wir den Zeitpunkt ab, bei dem die Wolke den Umkehrpunkt in der Falle erreicht hat. In diesem Moment ist ihre Auslenkung maximal und ihre Geschwindigkeit null. Nun verschieben wir die Lage des Fallenminimums instantan an den Ort der Atomwolke, indem wir den Strom in der unteren Fallenspule absenken. Auf diese Weise können wir den Atomen ihre kinetische Energie entziehen.

Abbildung 5.5 zeigt die Schwingung der Atome, nachdem die Magnetfalle versetzt wurde, bei verschiedenen Zeitpunkten der Versetzung. Die einzelnen Kurven sind mit einem Offset versehen, um sie besser voneinander zu trennen. Aufgetragen ist die Position der Atomwol-

ke bei verschiedenen Haltezeiten nach 8 ms Expansionszeit. Es gelingt eine Dämpfung der Schwingung auf etwa 20 % der ursprünglichen Amplitude.

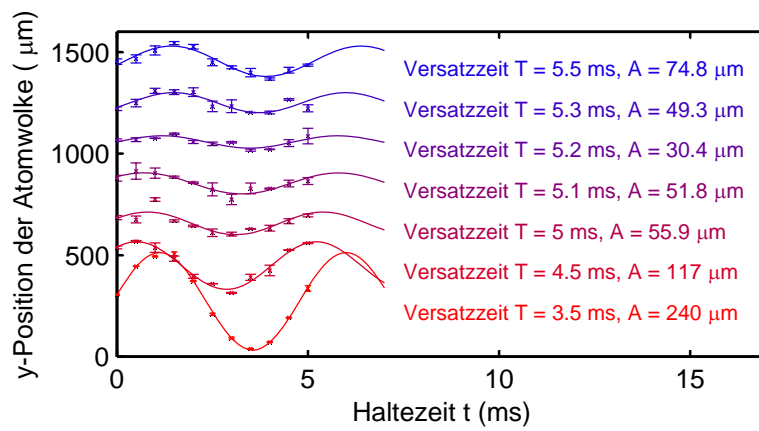


Abbildung 5.5: Optimierung des Versatzzeitzeitpunkts T. Aufgenommen ist die Position der Atomwolke bei verschiedenen Haltezeiten nach 8 ms Expansionszeit.

6 Zweiphotonenkopplung

Das eigentliche Ziel des Experiments ist es, die (zufällige) relative Phase zweier Bose-Einstein-Kondensate auszudämpfen. Dafür ist die kohärente Zweiphotonenkopplung des $|2, 1\rangle$ - und $|1, -1\rangle$ -Zustandes gleich in zweierlei Hinsicht wichtig. Zum einen muss das zweite Kondensat zunächst aus dem Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand erzeugt werden, wofür sich ein $\frac{\pi}{2}$ -Puls anbietet. Während des eigentlichen Dämpfungsprozesses wird die Zweiphotonenkopplung außerdem benötigt, damit der irreversible Zerfall über den Ringresonator im Dämpfungszyklus mehrmals durchlaufen werden kann.

In diesem Kapitel werden die Licht-Atom-Wechselwirkung und die daraus resultierenden Rabioszillationen kurz theoretisch vorgestellt, zunächst für einen Einphotonenübergang, dann für die Zweiphotonenkopplung. Daraufhin wird die Formulierung der Licht-Atom-Wechselwirkung mit den Begriffen der Dichtematrix und des Blochvektors vorgestellt. Mit dieser wird im folgenden Abschnitt Ramseys Methode getrennter oszillierender Felder erklärt, die wir für den Nachweis der Relativphasendämpfung verwenden wollen. Anschließend stelle ich die Breit-Rabi-Formel zur Berechnung der Resonanzfrequenz vor und gehe auf die räumliche Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz ein. Im zweiten Teil des Kapitels wird der experimentelle Aufbau charakterisiert, bevor im dritten Teil die Messergebnisse vorgestellt und diskutiert werden. Dieser letzte Abschnitt gliedert sich in die Messung der Zweiphotonen-Resonanzkurven und Rabioszillationen, die kurze Erläuterung des Effekts der wiederkehrenden Rabioszillationen, die Bestimmung der Rabifrequenz der Radioantenne aus den Messdaten sowie die Ergebnisse aus Ramseyexperimenten.

6.1 Theorie

6.1.1 Atom-Licht-Wechselwirkung und Einphotonen-Rabioszillationen

Die Wechselwirkung eines Atoms mit dem Lichtfeld, in dem es sich befindet, geschieht über sein Dipolmoment. Allgemein erfährt ein elektrischer Dipol \vec{d} im elektrischen Feld das Potential $V = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$. Die Elemente der Dipolmatrix eines Atoms sind

$$d_{ij} = e \langle i | \vec{e} \cdot \vec{r} | j \rangle, \quad (6.1)$$

wobei $\vec{\epsilon}$ die Polarisation des elektrischen Feldes ist. $|i\rangle$ und $|j\rangle$ sind die Energieeigenzustände des Atoms. Offenbar sind alle Diagonalelemente der Dipolmatrix null. Übergänge zwischen Niveaus können nur dann getrieben werden, wenn sie ein nichtverschwindendes Dipolmoment besitzen, was zu den bekannten Auswahlregeln für Dipolübergänge führt.

Wir wollen zunächst ein Atom mit zwei Energieniveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ betrachten. Sie besitzen die Energien $\hbar\omega_1$ und $\hbar\omega_2$ mit der Differenz $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$. Ein wichtiger Parameter des Systems ist die Verstimmung des Lichtfeldes zur atomaren Resonanz, $\delta = \omega - \omega_{12}$. Befindet sich dieses Zweiniveaumatom in einem Lichtfeld der Frequenz ω , so kann seine Wechselwirkung durch den Hamiltonoperator $W(t)$ mit

$$\langle 1|W(t)|2\rangle = \hbar\Omega_{12} \sin(\omega t) = \langle 2|W(t)|1\rangle^* \quad (6.2)$$

beschrieben werden, wobei $\Omega_{12} = \frac{d_{12}E}{\hbar}$ reell und zeitunabhängig ist und als Rabi-Frequenz bezeichnet wird.

Als Ansatz für die Wellenfunktion wählt man

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + c_2(t) e^{-i\omega_2 t} |2\rangle \quad (6.3)$$

mit den zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten $c_1(t)$ und $c_2(t)$. Gleichungen für deren zeitliche Entwicklung erhält man, indem man die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + W(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (6.4)$$

von links mit $\langle k| e^{i\omega_k t}$ multipliziert. Man erhält

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{1}{2}\Omega_{12} \left(e^{i(\omega+\omega_{12})t} - e^{-i(\omega-\omega_{12})t} \right) c_2(t) \quad (6.5)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{1}{2}\Omega_{12} \left(e^{i(\omega-\omega_{12})t} - e^{-i(\omega+\omega_{12})t} \right) c_1(t). \quad (6.6)$$

Nahe der Resonanz ergeben sich je ein schnell (mit $\omega + \omega_{12}$) und ein langsam (mit $\omega - \omega_{12}$) oszillierender Term. Das zeitliche Integral über den schnell rotierenden Term liefert nur einen sehr kleinen Beitrag, deshalb wird er in der Rotating Wave Approximation vernachlässigt. Damit vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\dot{c}_1(t) = \frac{1}{2}\Omega_{12} e^{-i\delta t} c_2(t) \quad (6.7)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{1}{2}\Omega_{12} e^{i\delta t} c_1(t). \quad (6.8)$$

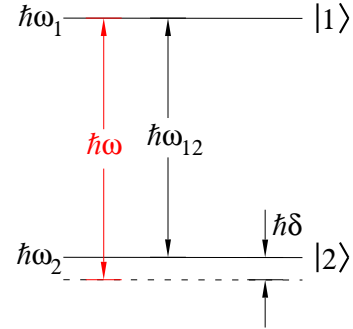


Abbildung 6.1: Energieschema eines Zweiniveaumatoms mit der Übergangsfrequenz ω_{12} , Lichtfrequenz ω sowie der Verstimmung δ .

Falls sich das System zu Beginn der Wechselwirkung im Zustand $|1\rangle$ befindet, ergibt sich für die zeitliche Entwicklung der Besetzungszahlen

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) \quad (6.9)$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega t\right), \quad (6.10)$$

mit $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{12}^2}$. Ω_{12} bezeichnet man als Einphotonen-Rabifrequenz, während Ω die verallgemeinerte Einphotonen-Rabifrequenz ist, mit der das System zwischen den beiden Zuständen hin und her schwingt. Ist das antreibende Lichtfeld zur Resonanz verstimmt, $\delta \neq 0$, wird die Oszillation schneller, allerdings erreicht das System keine vollständige Besetzungsinversion mehr.

6.1.2 Zweiphotonen-Rabioszillationen

Einen Zweiphotonenübergang, der durch zwei Lichtfelder betrieben wird, beschreibt man analog zum Einphotonenfall. Die hier gezeigte Herleitung entspricht der aus [Gentile *et al.* 1989]. Wir betrachten ein System aus drei Energieniveaus $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ mit den Energien $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ und $\hbar\omega_3$. Die jeweiligen Übergangsfrequenzen bezeichnen wir mit $\omega_{12} \equiv \omega_1 - \omega_2$, $\omega_{23} \equiv \omega_2 - \omega_3$ sowie $\omega_{13} \equiv \omega_1 - \omega_3$. Das System befindet sich im Lichtfeld zweier Laser der Frequenzen ω_o und ω_u . Die Verstimmung der Lichtfrequenz zum Zwischenniveau $|2\rangle$ wird als Defekt Δ bezeichnet, $\Delta = \omega_o - \omega_{12}$. Die Verstimmung von der Zweiphotonen-Resonanzfrequenz bezeichnen wir als $\delta = (\omega_o + \omega_u) - \omega_{13} = \Delta + (\omega_u - \omega_{23})$.

Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator $W(t)$ enthält nun die Elemente

$$\langle 1|W(t)|2\rangle = \hbar\Omega_{12} \sin(\omega_o t) = \langle 2|W(t)|1\rangle^* \quad (6.11)$$

$$\langle 2|W(t)|3\rangle = \hbar\Omega_{23} \sin(\omega_u t) = \langle 3|W(t)|2\rangle^* \quad (6.12)$$

mit den Einphotonen-Rabifrequenzen $\Omega_{12} = \frac{d_{12}E_o}{\hbar}$ und $\Omega_{23} = \frac{d_{23}E_u}{\hbar}$. Wie zuvor wählt man eine Wellenfunktion der Form

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + c_2(t) e^{-i\omega_2 t} |2\rangle + c_3(t) e^{-i\omega_3 t} |3\rangle \quad (6.13)$$

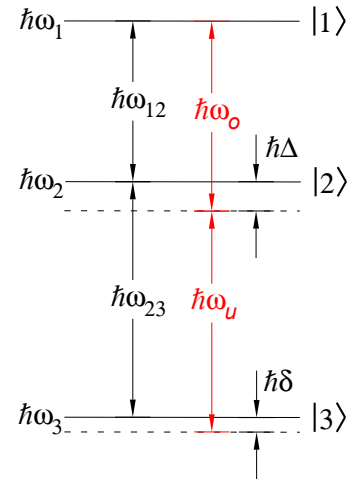


Abbildung 6.2: Energieschema eines Dreineiveaumatoms mit den Übergangsfrequenzen ω_{12} und ω_{23} , den Lichtfrequenzen ω_o und ω_u , sowie der Verstimmung zum Zwischenniveau Δ und zur Zweiphotonenresonanz δ .

und bekommt Gleichungen für die zeitliche Entwicklung der Koeffizienten $c_1(t)$, $c_2(t)$ und $c_3(t)$, indem man die Schrödingergleichung von links mit $\langle k | e^{i\omega_k t}$ multipliziert. In der RWA unter Vernachlässigung der schnell oszillierenden Terme bekommt man

$$\dot{c}_1(t) = \frac{1}{2}\Omega_{12} e^{-i\Delta t} c_2(t) \quad (6.14)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{1}{2}\Omega_{12} e^{i\Delta t} c_1(t) + \frac{1}{2}\Omega_{23} e^{-i(\delta-\Delta)t} c_3(t) \quad (6.15)$$

$$\dot{c}_3(t) = -\frac{1}{2}\Omega_{23} e^{i(\delta-\Delta)t} c_2(t) \quad (6.16)$$

Aus dem Lösungsansatz

$$c_1(t) = A_1 e^{i\lambda t} \quad (6.17)$$

$$c_2(t) = A_2 e^{i(\lambda+\Delta)t} \quad (6.18)$$

$$c_3(t) = A_3 e^{i(\lambda+\delta)t} \quad (6.19)$$

bekommt man eine kubische Eigenwertgleichung

$$\lambda \left((\lambda + \Delta)(\lambda + \delta) - \frac{1}{4}\Omega_{23}^2 \right) - \frac{1}{4}\Omega_{12}^2(\lambda + \delta) = 0. \quad (6.20)$$

Bei resonanter Einstrahlung, $\delta = 0$, hat diese Gleichung die einfachen Lösungen

$$\lambda_{10} = 0 \quad (6.21)$$

$$\lambda_{20} = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_{12}^2 + \Omega_{23}^2} \approx \frac{\Omega_{12}^2 + \Omega_{23}^2}{4\Delta} \quad (6.22)$$

$$\lambda_{30} = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_{12}^2 + \Omega_{23}^2} \approx -\Delta. \quad (6.23)$$

Die Näherung gilt, wenn die Verstimmung zum Zwischenniveau sehr viel größer als die Einphotonen-Rabifrequenzen ist, $\Delta \gg \Omega_{12}, \Omega_{23}$. Der Eigenwert λ_{30} ist also sehr viel größer als die beiden anderen Eigenwerte. Für kleine Verstimmungen δ zur Zweiphotonenresonanz sollte dies immer noch gelten, da sich die Eigenwerte nur geringfügig ändern sollten. Das erlaubt es uns, die kubische Bestimmungsgleichung näherungsweise unter der Voraussetzung $\Delta^2, \lambda_3^2 \gg \delta^2, \Omega_{12}^2, \Omega_{23}^2$ zu lösen. Für λ_3 erhält man dann die Gleichung

$$\lambda_3^2(\lambda_3 + \Delta) \approx 0. \quad (6.24)$$

Eine quadratische Bestimmungsgleichung für λ_1 und λ_2 bekommt man, indem man in der kubischen Gleichung (6.20) $\lambda_{1/2}$ gegenüber Δ vernachlässigt:

$$\lambda_{1/2}^2 + \lambda_{1/2} \left(\delta - \frac{\Omega_{12}^2 - \Omega_{23}^2}{4\Delta} \right) - \frac{\delta\Omega_{12}^2}{4\Delta} \approx 0. \quad (6.25)$$

Damit hat man als näherungsweise Lösungen die Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{12}^2 - \Omega_{23}^2}{4\Delta} - \delta - \Omega_{2ph} \right) \quad (6.26)$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{12}^2 - \Omega_{23}^2}{4\Delta} - \delta + \Omega_{2ph} \right) \quad (6.27)$$

$$\lambda_3 \approx -\Delta. \quad (6.28)$$

Für die Anfangsbedingung, dass sich das System im Zustand $|1\rangle$ befinden soll, bekommt man

$$|c_1(t)|^2 \approx 1 - \frac{\Omega_{2ph}^2}{\Omega_R^2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) \quad (6.29)$$

$$|c_2(t)|^2 \approx 0 \quad (6.30)$$

$$|c_3(t)|^2 \approx \frac{\Omega_{2ph}^2}{\Omega_R^2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right). \quad (6.31)$$

Dabei ist

$$\Omega_{2ph} = \frac{\Omega_{12} \cdot \Omega_{23}}{2\Delta} \quad (6.32)$$

die Zweiphotonen-Rabifrequenz, mit der die Populationen bei resonanter Einstrahlung ($\delta = 0$) oszillieren. Bei endlicher Verstimmung zur Resonanz schwingt das System mit der verallgemeinerten Zweiphotonen-Rabifrequenz

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega_{2ph}^2 + \left(\delta - \frac{\Omega_{23}^2 - \Omega_{12}^2}{4\Delta} \right)^2}. \quad (6.33)$$

Ist der Defekt Δ im Vergleich zu den Einphotonen-Rabifrequenzen genügend groß, so wird das Zwischenniveau so gut wie nicht mehr besetzt. Der Term

$$\frac{\Omega_{23}^2 - \Omega_{12}^2}{4\Delta} \equiv \delta' \quad (6.34)$$

beschreibt die Änderung der Zweiphotonen-Resonanzfrequenz aufgrund der Starkverschiebung der Energieniveaus, die von der Leistung der koppelnden Felder verursacht wird.

6.1.3 Dichtematrix und Blochvektor

Um die Wechselwirkung zwischen Licht und Atomen zu beschreiben, greift man gerne auf den sogenannten Dichtematrixformalismus zurück. Gegenüber der Schrödingergleichung besitzt dieser den Vorteil, dass sowohl kohärente als auch inkohärente Überlagerungen von Systemen beschrieben werden können und somit beispielsweise eine Berücksichtigung der spontanen Emission möglich wird (die in unserem System keine Rolle spielt). Der Dichteoperator ist

definiert als

$$\hat{\rho} = \langle \Psi | \Psi \rangle \quad (6.35)$$

Setzt man die Wellenfunktion wie in Formel (6.3) mit Entwicklungskoeffizienten $c_1(t)$ und $c_2(t)$ an, ergibt sich der Dichteoperator zu

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle \langle j| \\ \text{mit } \rho_{ij} &= \begin{pmatrix} c_1^* c_1 & c_1^* c_2 e^{i\omega_{12}t} \\ c_2^* c_1 e^{i\omega_{12}t} & c_2^* c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die Diagonaleinträge dieser Dichtematrix geben die Besetzungen der Zustände an, während ihre Nicht-Diagonalelemente die Kohärenzen beschreiben.

Eine anschauliche Beschreibung der Licht-Atom-Wechselwirkung in (effektiven) Zweiniveausystemen ist mit Hilfe des Blochvektors \vec{u} möglich [Meschede 2008]. Der Blochvektor setzt sich aus der dispersiven und absorptiven Komponente der Kohärenzen u und v sowie der Inversion w zusammen,

$$u = \tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{21} = 2 \cdot \Re[\tilde{\rho}_{12}] \quad \text{absorptive Komponente} \quad (6.37)$$

$$v = i(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}) = 2 \cdot \Im[\tilde{\rho}_{12}] \quad \text{dispersive Komponente} \quad (6.38)$$

$$w = \rho_{22} - \rho_{11} \quad \text{Inversion} \quad (6.39)$$

Die Inversion kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen, wobei

$$w = \rho_{22} - \rho_{11} = \begin{cases} 1 & \text{Atom im angeregten Zustand} \\ -1 & \text{Atom im Grundzustand} \\ 0 & \text{kohärente Überlagerung} \end{cases}$$

bedeutet. Absorptive und dispersive Komponente beschreiben den Sinus- bzw. Cosinusanteil des induzierten elektrischen Dipolmoments,

$$\langle \Psi | \hat{d} | \Psi \rangle = d_{12} \begin{pmatrix} \underbrace{u \cdot \cos(\omega t)}_{\text{in Phase mit Licht}} & - & \underbrace{v \cdot \sin(\omega t)}_{90^\circ \text{ phasenverschoben}} \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Mit dem Blochvektor können die sogenannten optischen Blochgleichungen zur Beschreibung

der Licht-Atom-Wechselwirkung kompakt als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Omega_{12} \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

geschrieben werden (ohne Dämpfung durch spontane Emission). Der Blochvektor dreht sich in einer Nutationsbewegung auf einer Kugeloberfläche mit Radius 1 und beschreibt mit seiner Position den aktuellen atomaren Zustand. Die Kreisfrequenz der Nutation ist die verallgemeinerte Einphotonen-Rabifrequenz $\Omega = \sqrt{\Omega_{12}^2 + \delta^2}$, die Drehachse ist

$$\begin{pmatrix} \Omega_{12} \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Bei resonanter Einstrahlung dreht sich der Blochvektor also um die u -Achse. Startet man mit einem System, bei dem alle Atome im Grundzustand sind ($w = -1$), so beschreibt der Blochvektor in der Zeit $t = \frac{\pi}{\Omega_{12}}$ einen Halbkreis und landet im vollständig invertierten Zustand, bei dem alle Atome angeregt sind.

6.1.4 Ramseys Methode getrennter oszillierender Felder

1950 stellte Norman Ramsey eine neue Methode vor, die eine erheblich präzisere Spektroskopie atomarer Übergänge erlaubte [Ramsey 1950]. Auf dieser heute als Ramseyspektroskopie bekannten Methode getrennter oszillierender Felder beruht beispielsweise die Zeitmessung in Atomuhren. Die ursprüngliche Methode geht von einem gleichförmig bewegten Atom- oder Molekülstrahl aus, der zwei Wechselwirkungszonen im Abstand L passiert. Zu Beginn befinden sich alle Atome im Grundzustand. Innerhalb der Wechselwirkungszone sind die Atome einem Mikrowellenfeld der Frequenz ω ausgesetzt, das in der Durchflugszeit gerade einen $\frac{\pi}{2}$ -Puls auf die Atome ausübt. Nach der ersten Wechselwirkungszone fliegen die Atome ungestört weiter, bis sie in der zweiten Wechselwirkungszone nach der Zeit $T = \frac{L}{v}$ einen zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls erfahren.

Durch den $\frac{\pi}{2}$ -Puls wird der Blochvektor bei resonanter Anregung in die u - v -Ebene in einen Zustand maximaler Kohärenz umgeklappt. In der wechselwirkungsfreien Region präzediert das atomare Dipolmoment mit der Frequenz ω_{21} , die bei Resonanz gerade der Mikrowellenfrequenz ω entspricht. Da der Blochvektor im mit ω rotierenden Koordinatensystem definiert ist, bewegt er sich nicht. Wenn die Atome die zweite Wechselwirkungsregion erreichen, sind Mikrowellenfeld und Dipolmoment in Phase und der zweite $\frac{\pi}{2}$ -Puls bringt die Atome vollständig in den angeregten Zustand.

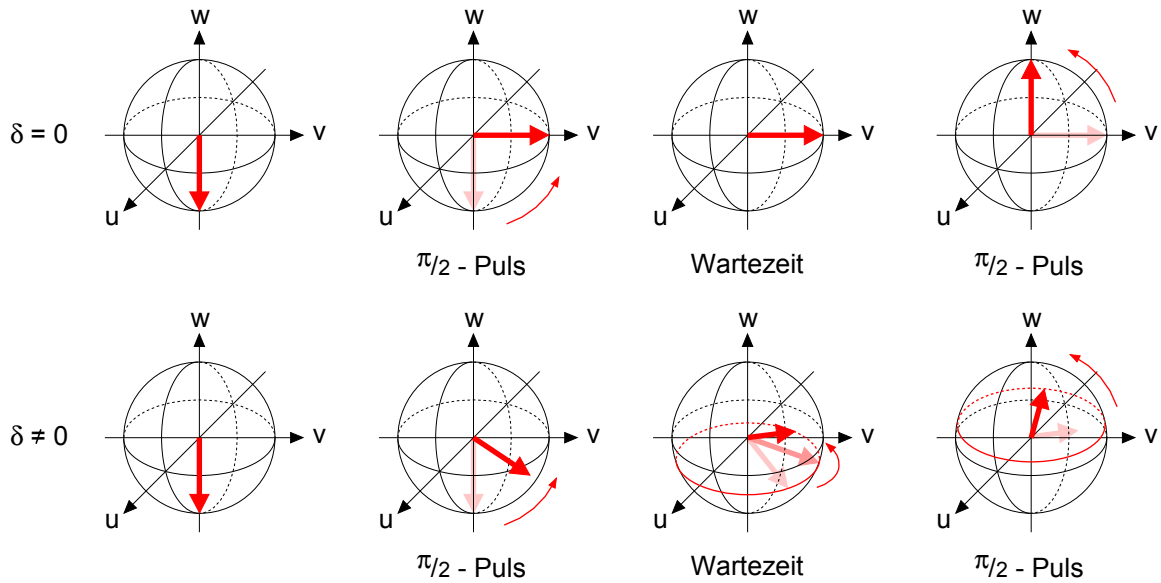


Abbildung 6.3: Bewegung des Blochvektors während eines Ramseyexperimentes bei resonanter (oben) und verstimmer (unten) Anregung.

Oszilliert das Mikrowellenfeld dagegen verstimmt zur atomaren Resonanz, wird der Blochvektor nicht ganz in die u - v -Ebene umgeklappt und präzediert nach der Wechselwirkungszone mit der Frequenz δ . Es sammelt sich ein von T abhängiger Phasenunterschied zwischen der oszillierenden Mikrowelle und dem Dipolmoment an, so dass der zweite $\frac{\pi}{2}$ -Puls den Blochvektor je nach Zeit T in verschiedene Überlagerungszustände umklappt. Misst man nun hinter der zweiten Wechselwirkungszone den Anteil der Atome im angeregten Zustand bei verschiedenen Mikrowellenfrequenzen, erhält man ein Maximum bei der Resonanzfrequenz. Variiert man die Zeit T zwischen den beiden Wechselwirkungen, so ergibt sich eine Oszillation der Besetzungszahl, deren Frequenz der Verstimmung der Mikrowelle zur atomaren Resonanz entspricht.

Die Ramseymethode ermöglicht nicht nur die Messung von Resonanzfrequenzen, sondern bietet auch eine Möglichkeit zur Bestimmung von Relativphasen. Durch den zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls wird die Phasendifferenz in eine Besetzungszahldifferenz umgewandelt. Das macht diese Technik für uns interessant, da wir mit ihr feststellen können, welche Relativphase die beiden Bose-Einstein-Kondensate nach Durchlaufen des Dämpfungszyklus besitzen.

6.1.5 Breit-Rabi-Formel und Resonanzfrequenz

Die beiden Zeemanzustände $|2, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ besitzen in erster Ordnung dieselbe Magnetfeldabhängigkeit,

$$E(\vec{r})/\hbar = \frac{1}{2} \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B(\vec{r}) = 2\pi \cdot 0.7 \text{ MHz/G} \cdot B(\vec{r}), \quad (6.42)$$

Atomare Masse ^{87}Rb	m	$1.443\,160\,60(11) \cdot 10^{-25} \text{ kg}$
Feinstruktur Landé-Faktor	$g_J (5^2S_{1/2})$	$2.002\,331\,13(20)$
Kern Landé-Faktor	$g_I \cdot \frac{\mu_N}{\mu_B}$	$-0.000\,995\,141\,4(10)$
Hyperfeinstrukturaufspaltung	ω_{hf}	$2\pi \cdot 6.834\,682\,610\,904\,29(9) \text{ GHz}$
bohrsches Magneton	μ_B	$9.274\,008\,99(37) \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$
plancksches Wirkungsquantum $/(2\pi)$	\hbar	$1.054\,571\,596(82) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Tabelle 6.1: Nützliche Konstanten von ^{87}Rb [Steck 2003].

und sind durch die Hyperfeinstrukturaufspaltung ω_{hf} getrennt. Da beide Niveaus stabil sind, wird die Breite des Übergangs allein durch die Zweiphotonen-Rabifrequenz der Kopplung bestimmt. Diese liegt in der Größenordnung weniger hundert Hertz, wodurch man auch auf Magnetfeldabhängigkeiten der Energieniveaus höherer Ordnung empfindlich ist. Diese führen zu einer Abweichung der Übergangsfrequenz vom Wert ω_{hf} , die wir in unserem Experiment messen können.

Für Hyperfeinstrukturniveaus mit $F = I \pm \frac{1}{2}$ wie in unserem Fall kann die Energie der Aufspaltung im Magnetfeld über die sogenannte Breit-Rabi-Formel [Mayer-Kuckuk 1994] berechnet werden:

$$E(B, I \pm \frac{1}{2}, m_F) = -\frac{\hbar\omega_{hf}}{2(2I+1)} + m_F g_I \mu_N B \pm \frac{\hbar\omega_{hf}}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_F}{2I+1} x + x^2}, \quad (6.43)$$

$$\text{mit } x = \frac{g_J \mu_B - g_I \mu_N}{\hbar\omega_{hf}} B \approx \frac{g_J \mu_B}{\hbar\omega_{hf}} B. \quad (6.44)$$

Der Kernspin von ^{87}Rb ist $I = \frac{3}{2}$. Alle Konstanten, die zur Berechnung der Energieaufspaltung nötig sind, sind in Tabelle 6.1.5 [Steck 2003] zusammengefasst. Für kleine Magnetfelder, $\mu_B B \ll \hbar\omega_{hf}$, kann der Wurzelterm in Gleichung (6.43) in einer Taylorentwicklung bis zu Termen mit x^2 genähert werden

$$\sqrt{1 + m_F x + x^2} \approx 1 + \frac{1}{2} (m_F x + x^2) - \frac{1}{8} m_F^2 x^2. \quad (6.45)$$

Die Breit-Rabi-Formel lautet damit

$$E(B, \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}, m_F) = -\left(\frac{1}{8} \pm \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{hf} + \left(g_I \frac{\mu_N}{\mu_B} \pm \frac{1}{4} g_J\right) m_F \mu_B B \\ \pm \frac{1}{4\hbar\omega_{hf}} \left(1 - \frac{m_F^2}{4}\right) (g_J \mu_B B)^2. \quad (6.46)$$

Uns interessiert die Energieaufspaltung zwischen dem $|2, 1\rangle$ - und $|1, -1\rangle$ -Zustand. Sie ist

$$\begin{aligned}\Delta E_{(2\rightarrow 1)}(B) &\equiv E(B, F = 2, m_F = 1) - E(B, F = 1, m_F = -1) \\ &= \hbar\omega_{hf} + 2g_I\mu_N B + \frac{3}{8\hbar\omega_{hf}} (g_J\mu_B B)^2\end{aligned}\quad (6.47)$$

$$\Delta\omega_{(2\rightarrow 1)}(B) = \omega_{hf} - 2\pi \cdot 2786.56 \cdot B[\text{G}] + 2\pi \cdot 430.931 \cdot B^2[\text{G}^2].\quad (6.48)$$

Der Verlauf von $\Delta\omega_{(2\rightarrow 1)}$ im Magnetfeld ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Für kleine Magnetfelder ist die Übergangsfrequenz demnach kleiner als die Hyperfeinstrukturaufspaltung ω_{hf} .

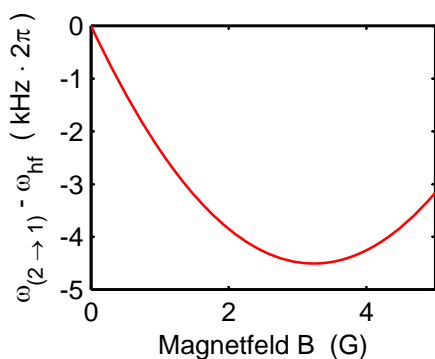


Abbildung 6.4: Magnetfeldabhängigkeit der Energieaufspaltung zwischen den Zuständen $|2, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$.

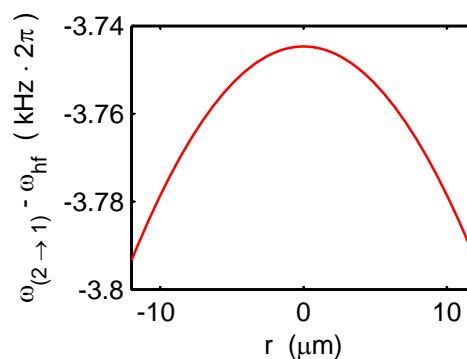


Abbildung 6.5: Ortsabhängigkeit der Zweiphotonen-Resonanzfrequenz in unserem Magnetfeld.

Das Magnetfeldpotential, in dem die Atome gefangen sind, lässt sich um sein Minimum harmonisch nähern und kann deshalb durch Fallenfrequenzen charakterisiert werden. In radialer Richtung besteht der Zusammenhang

$$V(r) = \mu_B g_F m_F B(r) \approx V_0 + \frac{m}{2} \omega_r^2 r^2.\quad (6.49)$$

Über eine Messung der Fallenfrequenz und des Fallenoffsets kann also das Magnetfeld der Falle berechnet werden. Für die $|2, 1\rangle$ -Atome mit $m_F = 1$ ist

$$B(r) \approx B_0 + \frac{m\omega_r^2}{\mu_B} r^2,\quad (6.50)$$

mit $B_0 = \frac{2\hbar\nu_{offset}}{\mu_B}$. Mit unseren Fallenparametern $\omega_r = 2\pi \cdot 200.9$ Hz und $\nu_{offset} = 1.33$ MHz ergibt sich in radialer Richtung das Magnetfeld

$$B(r) \approx 1.91 \text{ G} + 3.00 \cdot 10^8 \text{ 1/m}^2 \cdot r^2.\quad (6.51)$$

Abbildung 6.5 zeigt die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz des $|2, 1\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$ -Übergangs in

unserem Magnetfeld. Man sieht, dass sich die Resonanzfrequenz mit dem Ort ändert. Über die Ausdehnung eines Kondensats ($r_{BEC} \approx 5 \mu\text{m}$) beträgt diese Änderung einige Hertz.

6.1.6 Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz

Einen größeren Effekt erwarten wir durch die räumliche Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz, die in Kapitel 6.1.2 hergeleitet wurde,

$$\Omega_{2ph} = \frac{\Omega_{12} \cdot \Omega_{23}}{2\Delta}. \quad (6.52)$$

Sie ist antiproportional zur Verstimmung der anregenden Lichtfrequenz zum Zwischenniveau, das in unserem Experiment der $|2, 0\rangle$ -Zustand ist. Anders als die Ortsabhängigkeit der Zweiphotonen-Resonanzfrequenz, die von der Inhomogenität des $|2, 1\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$ -Übergangs herrührt, wird die Ortsabhängigkeit der Zweiphotonen-Rabifrequenz also von der Inhomogenität der Übergänge zum Zwischenniveau, $|2, 1\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$ und $|2, 0\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$, hervorgerufen.

Im Gegensatz zum $|2, 1\rangle$ - und $|1, -1\rangle$ -Zustand, deren Magnetfeldabhängigkeit sich nur in zweiter Ordnung unterscheidet, ist die Energie des Zwischenniveaus ortsunabhängig, da bei ihm die Projektion des magnetischen Moments auf das Magnetfeld verschwindet, $m_F = 0$. Dadurch werden die Übergangsfrequenzen und damit die Verstimmung zum Zwischenniveau stark ortsabhängig, was zu einer räumlich inhomogenen Rabifrequenz führt.

Abbildung 6.6 zeigt die Änderung der Rabifrequenz über die Ausdehnung eines Kondensats im Fallenminimum für die in unserem Experiment vorhandenen Einphotonen-Rabifrequenzen $\Omega_{mw} = 2\pi \cdot 14.3 \text{ kHz}$, $\Omega_{rf} = 2\pi \cdot 18.9 \text{ kHz}$ und den Defekt $\Delta = 2\pi \cdot 155 \text{ kHz}$ am Fallenminimum. Nimmt man für das Kondensat eine Ausdehnung von $5 \mu\text{m}$ an, so beträgt die Inhomogenität der Rabifrequenz über seine Breite 4 %.

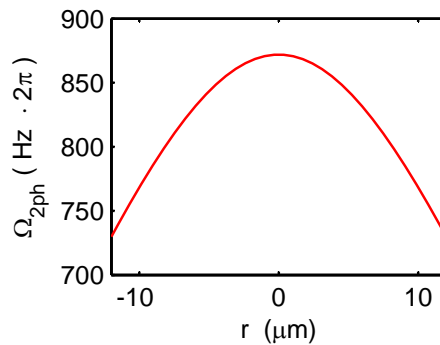


Abbildung 6.6: Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz durch die Ortsabhängigkeit der Verstimmung zum Zwischenniveau Δ . Die Rechnung wurde für $\Delta = 2\pi \cdot 155 \text{ kHz}$ durchgeführt.

6.2 Charakterisierung

Im Experiment realisieren wir die Zweiphotonenkopplung mit einer Kombination aus Radio- und Mikrowellenfeldern. Die Mikrowellenfrequenz wird von einem PLL-Synthesizer (LO-45B-680 von AME) erzeugt, der phasenstarr auf die 10 MHz-Referenzfrequenz eines Mikrowellensynthesizers (SMR 20 von Rhode&Schwarz) stabilisiert ist. Die Radiofrequenz stammt von einem HP-Frequenzgenerator (Typ 33120A). Nachdem die Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats im $|2, 1\rangle$ -Zustand (beschrieben in den Kapiteln 3 und 5) abgeschlossen ist, werden Radio- und Mikrowelle gleichzeitig mit Hilfe 100 ns schneller elektrischer Schalter (SW2AD-21 von PULSAR) angestellt und für eine bestimmte Dauer t eingestrahlt. Nach Ende des Experiments werden alle Fallen ausgeschaltet und die Atome nach mehreren Millisekunden Expansionszeit in beiden Hyperfeinzuständen abgebildet (siehe Kapitel 3.4).

6.2.1 Landau-Zener-Rampen zur Charakterisierung der Mikrowellenantenne

Die Rabifrequenz unseres Mikrowellenfeldes bestimmen wir mit Hilfe von Landau-Zener-Rampen. Um diese zu erklären, muss man die Atom-Licht-Wechselwirkung im Bild der sogenannten „dressed states“ betrachten [Cohen-Tannoudji *et al.* 1998]. Diese sind nichts anderes als die Eigenwerte des Hamiltonoperators, der das System beschreibt.

Ohne Wechselwirkung zwischen Photonen und Atomen hat man ungestörte Energieniveaus $|a, N\rangle$, $|b, N + 1\rangle$, die durch zwei Quantenzahlen beschrieben werden: a und b stehen für den atomaren Eigenzustand ($|a\rangle$ oder $|b\rangle$), in dem sich das Atom befindet, während N die Anzahl der Laserphotonen angibt. Diese ungestörten Energieniveaus sind in Abbildung 6.7 als gestrichelte Linien in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz ω_L dargestellt. Sie besitzen einen Kreuzungspunkt bei der Resonanzfrequenz ω_0 , wenn also die Lichtfrequenz der Energieaufspaltung zwischen den atomaren Zuständen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ entspricht.

Berücksichtigt man die Wechselwirkung zwischen Atomen und Licht, so bekommt man die gestörten Eigenwerte $|1(N)\rangle$ und $|2(N)\rangle$, die man als „dressed states“ bezeichnet. Ihr Energieverlauf ist in Abbildung 6.7 mit durchgezogenen Linien dargestellt. Die Wechselwirkung

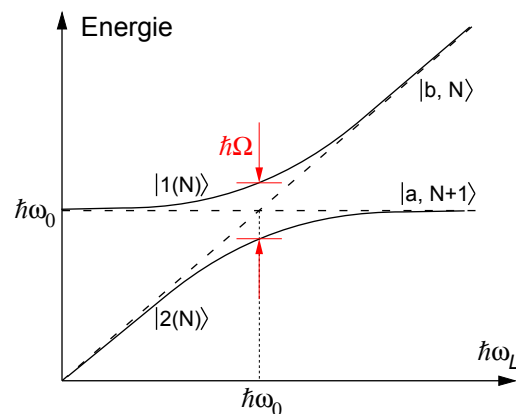


Abbildung 6.7: Energieverlauf der „dressed states“ $|1(N)\rangle$ und $|2(N)\rangle$ (durchgezogene Linien) in Abhängigkeit der Lichtfrequenz ω_L mit vermiedenem Kreuzungspunkt. Die Energien der ungestörten Zustände $|a, N\rangle$ und $|b, N + 1\rangle$ sind mit gestrichelten Linien eingezeichnet.

führt zu einer Abstoßung zwischen den beiden Niveaus, wodurch ihre Energieentartung am Kreuzungspunkt aufgehoben wird. Der minimale Abstand zwischen den beiden Energiekurven bei der Resonanzfrequenz entspricht der Rabifrequenz Ω des koppelnden Lichtfeldes. Weit entfernt von der Resonanzfrequenz nähern sie sich asymptotisch den ungestörten Zuständen $|a, N\rangle$ und $|b, N + 1\rangle$ an. Bei einer langsamen, adiabatischen Änderung der Lichtfrequenz (oder der Energieaufspaltung der Niveaus) über dieses „avoided crossing“ hinweg kann man die gesamte Besetzung vom atomaren Zustand $|a\rangle$ in den Zustand $|b\rangle$ transferieren und umgekehrt.

Fährt man jedoch eine schnelle Frequenzrampe über den vermiedenen Kreuzungspunkt, so kommt es zum nichtadiabatischen Transfer von Atomen über die Energielücke hinweg. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen nichtadiabatischen Übergang bei einer endlichen Geschwindigkeit der Frequenzrampe ist durch die Landau-Zener-Formel gegeben [Zener 1932] (für eine physikalisch intuitive Herleitung siehe [Vutha 2010]):

$$P = e^{-\frac{2\pi\Omega^2}{\dot{\delta}}}, \quad (6.53)$$

wobei $\dot{\delta}$ die Geschwindigkeit ist, mit der die Verstimmung δ zur Resonanzfrequenz geändert wird. Die Landau-Zener-Formel geht von einer linearen Änderung mit $\dot{\delta} = \text{konst.}$ aus.

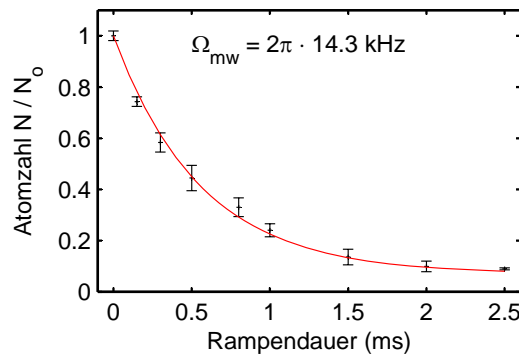


Abbildung 6.8: Bestimmung der Mikrowellen-Rabifrequenz über Landau-Zener-Rampen. Das Frequenzintervall der Rampe beträgt $\delta = 2\pi \cdot 4.5$ MHz, gemessen wurde die Anzahl der Atome im $|2, 2\rangle$ -Zustand nach der Landau-Zener-Rampe für verschiedene Rampendauern. Aus dem exponentiellen Fit ergibt sich eine Rabifrequenz von $\Omega_{mw} = 2\pi \cdot 14.3$ kHz.

Anhand der Atomzahlverluste, die bei einer Frequenzrampe über die Resonanz des $|2, 2\rangle \rightarrow |1, 1\rangle$ -Übergangs in einer kalten Wolke im $|2, 2\rangle$ -Zustand auftreten, können wir die Übergangswahrscheinlichkeit P messen. Wir führen die Messung bei verschiedenen Rampengeschwindigkeiten $\dot{\delta}$ durch, indem wir das Frequenzintervall konstant lassen und die Rampendauer ändern. Die Rabifrequenz bestimmen wir aus einem exponentiellen Fit an die Daten, siehe Abbildung 6.8. Die Atomzahl im $|2, 2\rangle$ -Zustand fällt in unserer Messung nicht ganz auf null ab. Das lässt sich dadurch erklären, dass ein Teil der Atome durch das Mikrowellenfeld wieder vom $|1, 1\rangle$ -Zustand zurückgekoppelt wird.

6.3 Messungen

6.3.1 Resonanzkurven

Zur Messung der Zweiphotonen-Resonanzkurve werden die Radiofrequenz und die Einstrahldauer konstant gehalten und die Besetzung des $|2, 1\rangle$ - und $|1, -1\rangle$ -Zustandes für verschiedene Mikrowellenfrequenzen aufgenommen. Auf diese Weise wird die Verstimmung zur Zweiphotonen-Resonanzfrequenz geändert, während die Verstimmung Δ zum Zwischenniveau konstant bleibt. Eine solche Messkurve ist in Abbildung 6.9 für zwei verschiedene Verstimmungen Δ zu sehen. Die Zahl der Atome im $|2, 1\rangle$ -Zustand N_2 wird auf die Gesamtatomzahl $N = N_2 + N_1$ normiert über der Verstimmung der eingestrahlten Zweiphotonenfrequenz zur Hyperfeinstrukturaufspaltung ω_{hf} aufgetragen. Die Resonanz besitzt die Form einer Lorentzkurve, deren Breite der Zweiphotonen-Rabifrequenz entspricht.

Wie erwartet ist die Resonanzfrequenz kleiner als die Hyperfeinstrukturaufspaltung ω_{hf} . Bei der Messung lag der Magnetfeldoffset bei etwa 1.9 G. Für dieses Magnetfeld liefert die Breit-Rabi-Formel (6.43) $\delta\omega_{theo} = 2\pi \cdot 3.7$ kHz als Wert für die Abweichung der Resonanzfrequenz von ω_{hf} . Unsere Messungen ergeben mit $\delta\omega_{exp1} = 2\pi \cdot 4.6$ kHz und $\delta\omega_{exp2} = 2\pi \cdot 4.0$ kHz Werte derselben Größenordnung. Die Abweichung zur Rechnung liegt daran, dass die eingestrahlten Felder zu einer Starkverschiebung der Energieniveaus führen, die außer von der Kopplungsstärke auch von der Verstimmung zum Zwischenniveau abhängt. Bei Ramseyexperimenten beobachten wir diesen Effekt ebenfalls, siehe Kapitel 6.3.5.

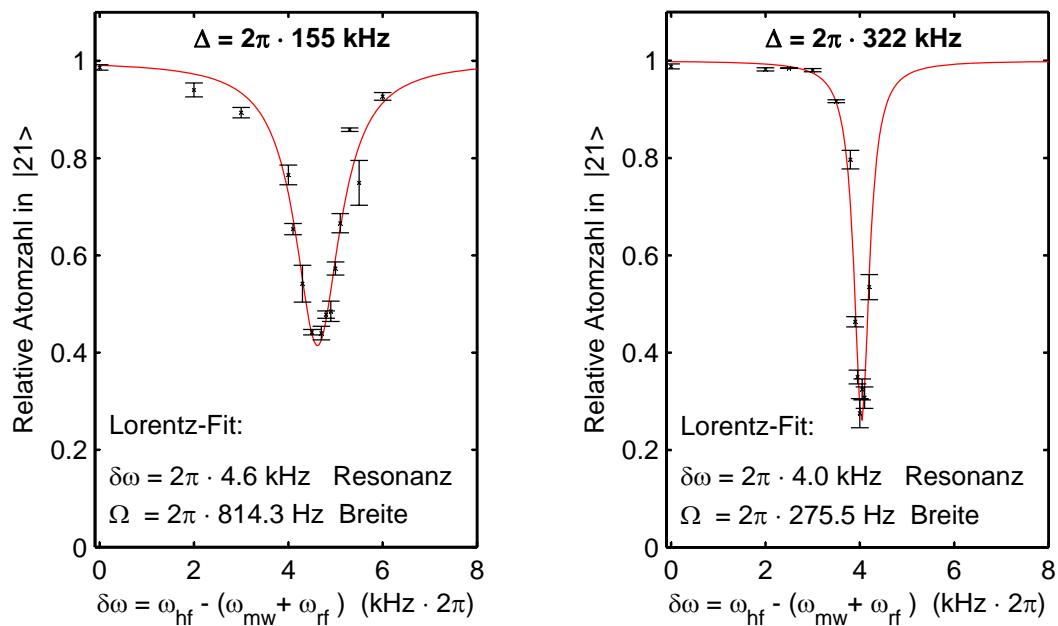


Abbildung 6.9: Resonanzkurve für zwei verschiedene Verstimmungen zum Zwischenniveau. Bei der Messung mit $\Delta = 2\pi \cdot 155$ kHz beträgt die Einstrahldauer 2 ms, bei der mit $\Delta = 2\pi \cdot 322$ kHz 4.2 ms.

6.3.2 Zweiphotonen-Rabioszillationen

Nachdem wir die Resonanzfrequenz auf die oben beschriebene Weise ermittelt haben, können wir Zweiphotonen-Rabioszillationen zwischen den beiden Zuständen messen. Dazu strahlen wir die Mikrowellen- und Radiofrequenz resonant zum Zweiphotonen-Übergang ein und variieren die Dauer. Die Verstimmung Δ zum Zwischenniveau wird dabei auf einen festen Wert gestellt. Nach jedem Zyklus bestimmen wir wie zuvor durch Absorptionsabbildung die Besetzung beider Zustände.

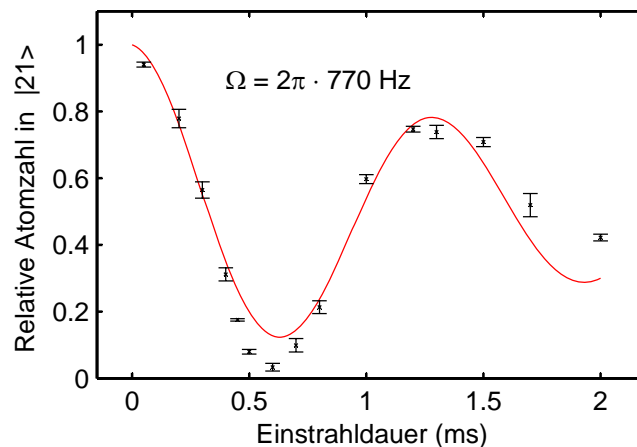


Abbildung 6.10: Zweiphotonen-Rabioszillation bei einer Verstimmung von $\Delta = 2\pi \cdot 155 \text{ kHz}$ zum Zwischenniveau. Aus dem Fit einer gedämpften Sinusschwingung an die Messpunkte ergibt sich eine Rabifrequenz von $\Omega = 2\pi \cdot 770 \text{ Hz}$.

Abbildung 6.10 zeigt die Messwerte für eine Verstimmung von $\Delta = 2\pi \cdot 155 \text{ kHz}$. Zur Bestimmung der Zweiphotonen-Rabifrequenz fitten wir die Funktion $f_{fit} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Omega t)e^{-\lambda t}$ mit zwei freien Parametern Ω und λ an unsere Messwerte. Leider gibt diese Funktion den wahren Verlauf der Population nicht besonders gut wieder. Die so bestimmte Rabifrequenz von $\Omega = 2\pi \cdot 770 \text{ Hz}$ besitzt also einen relativ großen Fehler.

Aus einem Lorentz-Fit an die Resonanzkurve erhalten wir für die gleichen Parameter den Wert $\Omega = 2\pi \cdot 814 \text{ Hz}$. Wie im linken Bild der Abbildung 6.9 zu sehen ist, passt sich dieser Fit recht gut an die Messwerte an und liefert vermutlich einen genaueren Wert für die Rabifrequenz. Unter den geschilderten Umständen ist die Übereinstimmung der beiden Messwerte relativ gut.

Führt man dieselbe Messung mit einer rein thermischen Atomwolke durch, werden die Rabioszillationen noch stärker gedämpft und es stellt sich eine Gleichgewichtsbesetzung ein, bei der etwa 60% der Atome im oberen Zustand sind. Die Messung wurde für $\Delta = 2\pi \cdot 322 \text{ kHz}$ durchgeführt und ist in Abbildung 6.11 zu sehen.

Allerdings kommt es nicht nur zum Ausdämpfen der Rabioszillationen. Bei anderen Verstimmungen zum Zwischenniveau beobachten wir andere Effekte wie eine unregelmäßige Zu- und

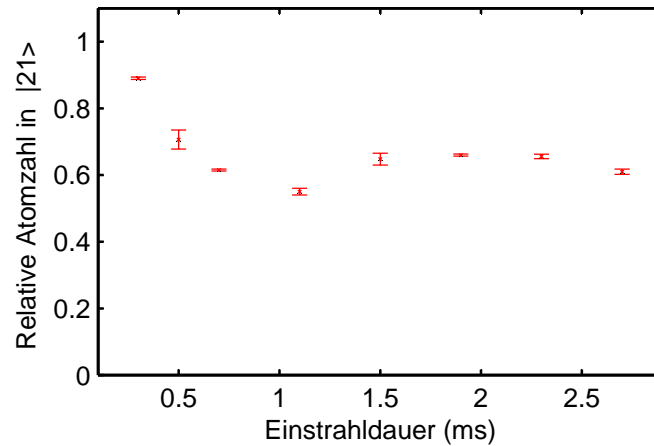


Abbildung 6.11: Rabioszillation einer thermischen Atomwolke bei $\Delta = 2\pi \cdot 322$ kHz.

Abnahme der Amplitude sowie eine nichtharmonische, teilweise sprunghafte Änderung der Besetzungen. Besonders gut ist dieser ungleichmäßige Verlauf der Populationen in Abbildung 6.12 zu sehen, die eine Messung bei $\Delta = 2\pi \cdot 322$ kHz zeigt.

Wir vermuten, dass diese Effekte durch die Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz über die Ausdehnung des Kondensats hervorgerufen werden (siehe Abschnitt 6.1.6). Durch sie findet die Rabioszillation innerhalb der Atomwolke nicht mehr synchron statt. Da die Ausdehnung einer thermischen Wolke größer ist als die eines Bose-Einstein-Kondensats, sind auch die Inhomogenitäten in diesem Fall größer und führen zu einem stärkeren Auswaschen der Rabioszillationen in Abbildung 6.11.

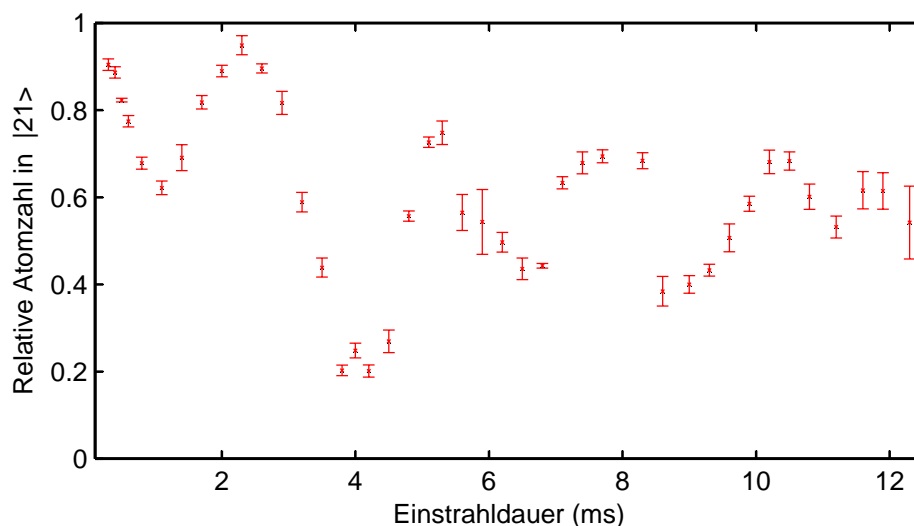


Abbildung 6.12: Zweiphotonen-Rabioszillation bei einer Verstimmung von $\Delta = 2\pi \cdot 322$ kHz. Die Amplitude der Schwingung steigt erst an und nimmt dann wieder ab. Bei den Einstrahldauern 7 ms und 8.4 ms scheinen plötzliche Phasensprünge aufzutreten.

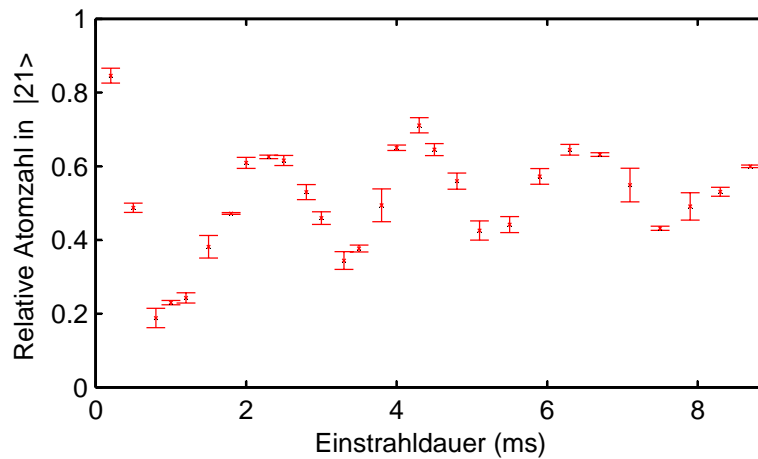


Abbildung 6.13: Zweiphotonen-Rabioszillation bei einer Verstimmung von $\Delta = 2\pi \cdot 262$ kHz.

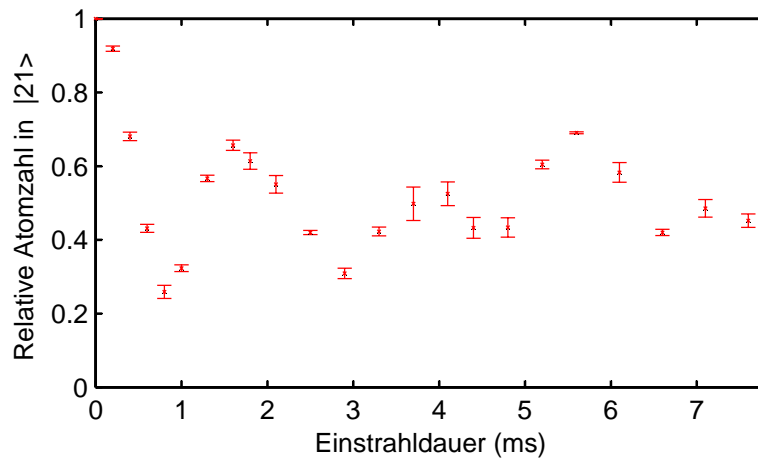


Abbildung 6.14: Zweiphotonen-Rabioszillation bei einer Verstimmung von $\Delta = -2\pi \cdot 300$ kHz.

6.3.3 Wiederkehrende Rabioszillationen

Bei Experimenten mit ^{87}Rb in den Spinkomponenten $|2, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ am JILA haben Matthews et. al. beobachtet, dass es bei einer ortsabhängigen Verstimmung der Zweiphotonen-Rabifrequenz zum Zerfall und einer anschließenden Wiederkehr von Rabioszillationen kommt [Matthews 1999]. Da wir in unsere Experimente mit denselben Hyperfeinzuständen durchführen, sollten diese Effekte auch bei uns auftreten. Eine detaillierte theoretische Beschreibung des Systems findet sich in [Williams *et al.* 2000].

Der Ordnungsparameter eines zweikomponentigen Kondensats setzt sich aus den komplexen Feldamplituden Φ_1 und Φ_2 der beiden Zustände $|2, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ zusammen und ist ein Element des $\text{SU}(2)$. Durch die Inhomogenität der Rabifrequenz über die Ausdehnung des Kondensats bildet sich ein kontinuierlicher Phasengradient entlang des Ordnungsparameters aus. Dieser Phasengradient in der de Broglie-Welle führt zu einem räumlich variierenden Bloch-

vektor und nimmt so Einfluss auf dessen Dynamik. Er äußert sich durch ein Auswaschen der Rabioszillationen. Der zunehmende Phasengradient ist mit einem Ansteigen der kinetischen Energie im Kondensat verbunden. Diese bewirkt schließlich, dass sich der Ordnungsparameter so über die $SU(2)$ -Sphäre verbiegt, dass im weiteren Verlauf der inhomogenen Einstrahlung der Phasengradient wieder abgebaut wird. Im Experiment sieht man ein Wiederkehren der Rabioszillationen.

Dieser kontinuierlich Abbau des Phasengradienten ist nur durch die Mehrdimensionalität des Ordnungsparameters möglich. In einem System mit einem eindimensionalen Ordnungsparameter würde der Phasengradient in einem sprunghaften Prozess abgebaut werden.

In den Experimenten, die in [Matthews 1999] vorgestellt werden, beinhaltet ein solcher Zerfalls- und Wiederkehr-Prozess mehrere Dutzend Rabioszillationsperioden. Allerdings sind die experimentellen Parameter schwer mit den unseren zu vergleichen, zum Beispiel ist die Fallenfrequenz mit $\omega_z = 2\pi \cdot 63$ Hz um einiges kleiner als bei uns. Ein Hauptunterschied ist außerdem, dass die Fallenposition der beiden Spinkomponenten in vertikaler Richtung leicht zueinander versetzt war.

Es lässt sich spekulieren, dass die Phasensprünge, die wir in Abbildung 6.12 beobachten, mit einem diskontinuierlichen Verhalten des Phasengradienten zusammenhängen. Eventuell ermöglicht seine $SU(2)$ -Eigenschaft nicht in allen Fällen ein stetiges Verbiegen des Ordnungsparameters. Dies sind jedoch nur Vermutungen, die sowohl theoretisch als auch experimentell näher untersucht werden müssen.

6.3.4 Rabifrequenz der Radioantenne

In unserem Experiment ist es schwierig, die Rabifrequenz der Radiowelle direkt zu messen. Da die Zeemanaufspaltung des $F=2$ -Zustands äquidistant ist, werden durch eine resonant eingestrahlte Radiofrequenz alle Niveaus gleichzeitig gekoppelt. In der Magnetfalle sind jedoch nur zwei der Zeemanzustände gefangen. Als Alternative zur direkten Messung können wir die Rabifrequenz der Radiowelle jedoch über Gleichung (6.52) aus den gemessenen Zweiphotonen-Rabioszillationen abschätzen. Dazu tragen wir die gemessenen Zweiphotonen-Rabifrequenzen für verschiedene Verstimmungen zum Zwischenniveau über $1/\Delta$ auf und bestimmen Ω_{rf} aus der Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Auswertung ist in Abbildung 6.15 dargestellt. Um eine Ausgleichsgerade anfitzen zu können, wurde die Zweiphotonen-Rabifrequenz für negative Verstimmungen Δ mit -1 multipliziert. Die beiden Geraden beziehen sich auf verschiedene Messmethoden zur Bestimmung der Rabifrequenz. Bei den roten Messpunkten wurde sie aus der Frequenz der Rabioszillationen bestimmt (siehe Abbildung 6.10), bei den blauen aus der Breite eines Lorentz-Fits an die Resonanzkurve (siehe Abbildung 6.9).

Da wir kein passendes Modell für die bei den Rabioszillationen auftretenden Effekte haben, ist es schwer, die Rabifrequenz aus den Kurven zu bestimmen. Wir verwenden bei der Auswertung nur die ersten Oszillationsperioden, die noch annähernd durch eine (gedämpfte) Sinusfunktion beschrieben werden können. Die Rabifrequenz, die wir aus dem Sinusfit erhalten, besitzt daher einen relativ großen Fehler. Das erklärt die große Abweichung der blauen von den roten Messpunkten. Der Mittelwert aus beiden Messungen liefert eine Rabifrequenz von $\Omega_{rf} = 2\pi \cdot 19$ kHz für die Radioantenne.

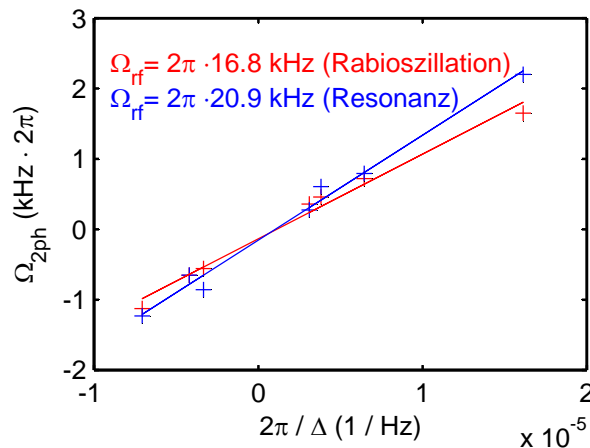


Abbildung 6.15: Bestimmung der Rabifrequenz der Radioantenne aus den Zweiphotonen-Rabifrequenzen. Aufgetragen ist die Zweiphotonen-Rabifrequenz aus Messungen der Resonanz (blau) und Rabioszillationen (rot) über der inversen Verstimmung zum Zwischenniveau.

6.3.5 Ramseyexperimente

Im späteren Fusionsexperiment soll die Ramseymethode dazu dienen, die Relativphase der beiden Kondensate nach der Dämpfung zu bestimmen. Dabei starten wir mit einem Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand. Der erste $\frac{\pi}{2}$ -Puls dient dazu, ein zweites Kondensat im $|1, -1\rangle$ -Zustand zu erzeugen. Danach kommt eine Wartezeit, in der keine Wechselwirkung stattfindet. Vor dem zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls werden dann beide Kopplungen - die kohärente Zweiphotonenkopplung mit Mikro- und Radiowelle und die inkohärente Kopplung über die Resonatormode - für eine gewisse Dauer eingeschaltet. Am Ende detektiert man die Atomzahlen in beiden Hyperfeinzuständen und bestimmt auf diese Weise die Relativphase.

Um die Ramseymethode auszutesten, führen wir zunächst herkömmliche Ramseymessungen ohne Dämpfung durch. Wie bei den Messungen der Rabioszillationen in Kapitel 6.3 ist der Ausgangspunkt ein Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand. Alle $\frac{\pi}{2}$ -Pulse werden über die Zweiphotonenkopplung mit Radio- und Mikrowelle realisiert. Zuerst messen wir die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz mit der in Kapitel 6.3.1 besprochenen Methode. Anschließend führen wir ein Ramseyexperiment durch, in dem wir die Wartezeit zwischen zwei $\frac{\pi}{2}$ -Pulsen variieren und

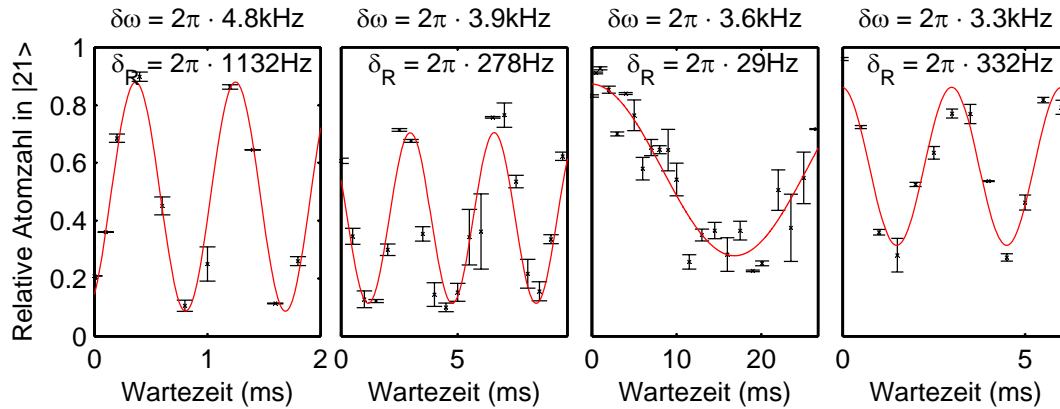


Abbildung 6.16: Ramseyexperiment bei verschiedenen Verstimmungen $\delta\omega$ der Zweiphotonenkopplung zur Hyperfeinstrukturaufspaltung. Es wurde die relative Atomzahl im $|21\rangle$ -Zustand für verschiedene Wartezeiten zwischen den beiden $\frac{\pi}{2}$ -Pulsen gemessen. Die Oszillationsfrequenz δ_R der Besetzungszahl gibt die Verstimmung zur Zweiphotonen-Resonanzfrequenz an. Die Verstimmung zum Zwischenniveau beträgt bei dieser Messung $\Delta = 2\pi \cdot 155\text{ kHz}$.

jeweils nach dem zweiten Puls die Atomzahlen in den beiden Hyperfeinzuständen bestimmen.

Bei einer Kopplung mit der zuvor gemessenen Zweiphotonen-Resonanzfrequenz würde man bei diesem Experiment eigentlich erwarten, dass unabhängig von der Wartezeit alle Atome im $|1, -1\rangle$ -Zustand landen, da keine Verstimmung vorliegt. Tatsächlich beobachtet man eine Ramseyoszillation, die erst bei einer um $2\pi \cdot 900\text{ Hz}$ angepassten Einstrahlfrequenz verschwindet (siehe dazu Abbildung 6.16). Versucht man allerdings, bei dieser Frequenz Rabioszillationen zu messen, bekommt man keine volle Modulation mehr.

Diese Diskrepanz zwischen der über Rabioszillationen bestimmten Resonanzfrequenz einerseits und der über das Ramseyexperiment bestimmten Resonanzfrequenz andererseits lässt sich dadurch erklären, dass die Intensität der Mikro- und Radiowelle eine Starkverschiebung der Energieniveaus hervorruft. In der Wartezeit zwischen den $\frac{\pi}{2}$ -Pulsen ist die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz also eine andere als während der Wechselwirkung. Über Gleichung (6.34) aus Kapitel 6 kann man diese Verschiebung berechnen. Für die Messung aus Abbildung 6.16 ergibt sich der Wert $\delta' = 2\pi \cdot 270\text{ Hz}$. Dieser ist etwa dreieinhalb mal kleiner als der im Experiment beobachtete, was an den großen Unsicherheiten sowohl bei der Bestimmung der Einphotonen-Rabifrequenzen als auch der Verstimmung zum Zwischenniveau liegen kann.

Dagegen zeigt der Wert von $\delta\omega = 2\pi \cdot 3.6\text{ kHz}$, den die Ramseymessung für die Resonanzfrequenz ohne Starkverschiebung liefert, eine hervorragende Übereinstimmung mit der Breit-Rabi-Formel. Aus dieser wurde in Kapitel 6.3.1 der Wert $\delta\omega_{th} = 2\pi \cdot 3.7\text{ kHz}$ berechnet. Für das Fusionsexperiment ist diese Resonanzfrequenz die entscheidende. Wir können davon ausgehen, dass wir sie mit einem Ramseyexperiment, wie es in Abbildung 6.16 gezeigt wird, auf $2\pi \cdot 50\text{ Hz}$ genau bestimmen können.

Wie konstant die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz während der Experimente ist, lässt sich leicht abschätzen. Sie hängt hauptsächlich vom Fallenoffset des $|2, 1\rangle$ -Zustandes ab, der an einem Nachmittag um maximal $2\pi \cdot 20$ kHz driftet. Eine Drift dieser Größenordnung würde die Zweiphotonen-Resonanzfrequenz um $2\pi \cdot 35$ Hz ändern - was gegenüber unserer Messgenauigkeit zu vernachlässigen ist.

6.3.6 Dephasierung

Um zu testen, wie stark die beiden Kondensate in der Wartezeit zwischen zwei $\frac{\pi}{2}$ -Pulsen dephasieren, führen wir das Ramseyexperiment für verschiedene Wartezeiten wiederholt durch. Führt eine Störung der Kondensate durch nicht kondensierte Atome oder ein Rauschen der Magnetfelder in dieser Zeit zu einer Zerstörung der Kohärenz zwischen beiden Kondensaten und damit zu einer willkürlichen Dephasierung, sollten bei einer Wiederholung des Experiments mit gleichen Parametern die Ergebnisse statistisch streuen und zwar umso stärker, je länger die Wartezeit wird.

Wir beobachten tatsächlich eine Streuung der relativen Atomzahlen, die jedoch unabhängig von der eingestellten Wartezeit ist, siehe Abbildung 6.17. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Streuung weniger mit einer Dephasierung zusammenhängt als vielmehr auf Schwierigkeiten bei der Reproduktion aller experimentellen Parameter zurückzuführen ist (Schuss-zu-Schuss-Schwankungen zum Beispiel im Magnetfallenoffset). Man kann also darauf schließen, dass die Überlagerung der beiden Kondensate auch nach 60 ms noch kohärent ist.

Es kann sein, dass wir eine wirkliche Dekohärenz der beiden Kondensate herstellen müssen, um die Dämpfung der Relativphase zu demonstrieren. Zumindest benötigen wir verschiedene Relativphasen zu Beginn des Dämpfungsexperimentes, um wie in der Simulation aus Abbildung 2.4 zeigen zu können, dass nach der Dämpfung immer dieselbe Besetzung vorliegt, unabhängig von der Vorgeschichte der Kondensate.

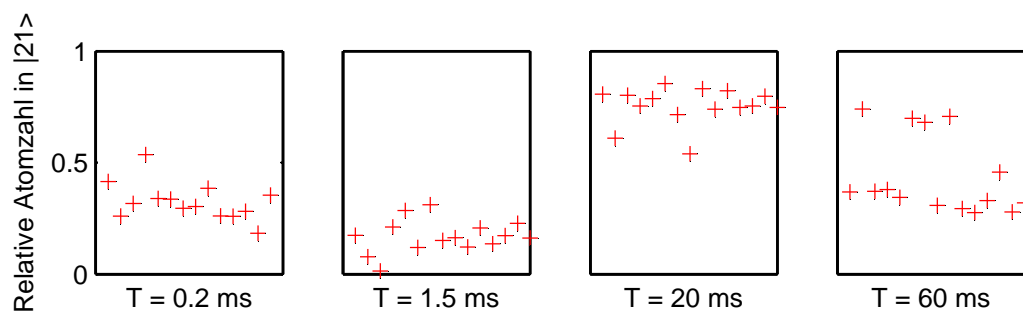


Abbildung 6.17: Wiederholte Messung der atomaren Besetzungen nach einem Ramsey-Experiment bei vier verschiedenen Wartezeiten. Die Ergebnisse der einzelnen Messungen sind zur besseren Sichtbarkeit auf der x-Achse gegeneinander verschoben.

Eine Möglichkeit, Dekohärenz zu erreichen, ist es, das zweite Kondensat nicht durch einen $\frac{\pi}{2}$ -Puls zu erzeugen, sondern einen längeren Kopplungspuls zu wählen. Wie in Kapitel 6.3 gezeigt wurde, dämpfen die Zweiphotonen-Rabioszillationen relativ schnell aus und erreichen etwa eine Gleichbesetzung der beiden Niveaus. Dieses Ausdämpfen entsteht gerade durch zunehmende Inkohärenz der beiden Kondensate.

Eine andere Möglichkeit, Kohärenz zu zerstören, ist die Zuführung von ungerichteter Energie aus einem „Wärmebad“. Ein größerer Anteil nicht kondensierter Atome stellt ein solches Wärmebad dar. Man könnte daher zunächst das Kondensat im $|2, 1\rangle$ -Zustand so erzeugen, dass es noch von vielen thermischen Atomen umgeben ist. Dann müsste man einen $\frac{\pi}{2}$ -Puls einstrahlen und anschließend warten, bis die thermische Wolke die Kohärenz der beiden Spin-komponenten zerstört hat. Bevor der Dämpfungszyklus durchlaufen wird, könnte man dann durch Nachevaporation einen Großteil der Atome kondensieren.

Um eine Relativphase zwischen den Kondensaten ohne Dekohärenz einzuführen, kann man beispielsweise ein Lichtfeld mit einer leichten Verstimmung zum Übergang $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ einstrahlen. Während der Kopplung führen die Blochvektoren der Niveaus eine Nutationsbewegung mit der verallgemeinerten Rabifrequenz durch. Da die Verstimmung des Lichtfeldes zum $|1, -1\rangle$ -Zustand um $2\pi \cdot 6.8$ GHz größer ist als die zum $|2, 1\rangle$ -Zustand, sammelt sich während dieser Nutation eine Relativphase zwischen den Blochvektoren an.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit werden die ersten Schritte auf dem Weg zur „Ultrakalten Fusion“ - der Vereinigung zweier Bose-Einstein-Kondensate durch Ausdämpfung ihrer Relativphase mit Hilfe eines optischen Ringresonators - vorgestellt. Das Verfahren beruht auf einem Vorschlag von [Jaksch *et al.* 2001]. Dabei werden zwei Bose-Einstein-Kondensate aus ^{87}Rb in verschiedenen Hyperfeinzuständen, die in räumlich überlappenden Magnetfallen eingeschlossen sind, kohärent über eine Mikrowellen-Radiofrequenzkombination gekoppelt. Zusätzlich besteht eine irreversible Ramankopplung der beiden Zustände, bei der die Emission von Photonen in den Ringresonator stimuliert wird. Der durch den Resonator entstehende Verlustkanal führt zur Dissipation und einem Ausdämpfen der Relativphase.

Die theoretischen Gleichungen wurden mit dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung simuliert. Bei Parametern für die Kopplungsstärke, wie sie in unserem Experiment zu erwarten sind, ist die Phase nach weniger als hundert Millisekunden vollständig auf einen festen Wert ausgedämpft. Allerdings muss der Resonator dabei in der Konfiguration mit hoher Finesse betrieben werden. Weitere Simulationen zeigen, dass durch den Dämpfungszyklus die Vorgeschichte der beiden Kondensate gelöscht wird und ihre resultierende Relativphase einzig von den Kopplungsstärken abhängt. Außerdem stellten wir fest, dass die Simulationen eines einzelnen Atoms analoge Ergebnisse zu denen der vollständigen Gleichungen mit zwei Kondensaten liefern. Daraus schließen wir, dass es sich bei dem oben beschriebenen Mechanismus um eine Dämpfung der internen Freiheitsgrade handelt.

Für die Implementierung des Dämpfungszyklus ist es wichtig, unseren Ringresonator genau zu kennen. Die Finesse wurde in den Konfigurationen hoher und niedriger Güte auf 135 000 beziehungsweise 1 790 bestimmt. Vor allem der freie Spektralbereich ist eine wichtige Größe bei der Umsetzung der Ramankopplung. Mit Hilfe eines Pound-Drever-Hall-Signals ist es gelungen, diesen auf $2\pi \cdot 550$ Hz genau zu bestimmen. Damit ist die Messung sehr viel genauer als die Linienbreite des Resonators, die bei hoher Finesse $2\pi \cdot 12.7$ kHz beträgt. Dabei konnten wir eine Drift beobachten, die vom Thermalisieren des Resonators herrührt, der im laufenden experimentellen Zyklus mit Stickstoff gekühlt wird. Bei Raumtemperatur ist der Resonator etwas länger und daher der freie Spektralbereich um $2\pi \cdot 2.1$ MHz kleiner. Im Zyklus mit Stickstoffkühlung hat der freie Spektralbereich bei hoher Finesse den Wert $2\pi \cdot (3.430458 \text{ GHz} \pm 550 \text{ Hz})$.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden kohärente Überlagerungen verschiedener Hyperfeinzustände durch eine Zweiphotonenkopplung in unserer Apparatur hergestellt. Zur Charakterisierung dieser Kopplung wurden Zweiphotonen-Resonanzkurven und Rabioszillationen gemessen. Dabei beobachten wir starke Abweichungen von der theoretisch harmonischen Form der Rabioszillationen wie eine unregelmäßige, teilweise sprunghafte Zu- und Abnahme der Oszillationsamplitude. Dieses Verhalten kann eventuell auf eine räumliche Inhomogenität der Zweiphotonen-Rabifrequenz zurückgeführt werden, die dadurch zustande kommt, dass die Verstimmung zum Zwischenniveau ortsabhängig ist. Außerdem kann ein verbleibender Anteil thermischer Atome um die Kondensate zu Dekohärenzen führen. Darüber hinaus wird die Möglichkeit wiederkehrender Rabioszillationen diskutiert, wie sie [Matthews 1999] in einem ähnlichen System beobachtet. Die aus den Resonanzkurven bestimmte Übergangsfrequenz ist größer als der theoretische Wert, da die Niveaus durch die Kopplung starkverschoben werden.

Ramseyexperimente bieten die Möglichkeit, einen Phasenunterschied in eine Besetzungszahldifferenz umzuwandeln, die sehr viel leichter gemessen werden kann. In dieser Arbeit werden Messungen aus Ramseyzyklen vorgestellt, bei denen zunächst ein $\frac{\pi}{2}$ -Puls zu einer Gleichbesetzung der beiden Hyperfeinzustände führt. Nach einer variierenden Wartezeit und einem zweiten $\frac{\pi}{2}$ -Puls wird anschließend die Population beider Zustände gemessen. Aus diesen Messungen kann ebenfalls die Resonanzfrequenz bestimmt werden, im Gegensatz zum obigen Messverfahren jedoch ohne Starkverschiebung. Bei einem Magnetfeldoffset von 1.9 G beträgt sie $\omega_{hf} - 2\pi \cdot 3.6$ kHz mit einer Unsicherheit von $2\pi \cdot 50$ Hz.

Nachdem die Zweiphotonenkopplung realisiert und der Ringresonator charakterisiert wurden, folgt als nächster Schritt die Kombination der kohärenten Kopplung und der Ramankopplung. Durch die genaue Vermessung des freien Spektralbereichs und der Zweiphotonen-Resonanzfrequenz wissen wir mit einer Unsicherheit von weniger als $2\pi \cdot 1$ kHz, wie wir die Frequenz des von außen eingestrahlteten Lichtfeldes einstellen müssen. Aus dem in Formel (4.6) gegebenen Zusammenhang ergibt sich, dass die AOM-Frequenz im Fusionsexperiment $2\pi \cdot 137.143$ MHz betragen muss. In diesem Fall werden beim Ramanübergang Photonen emittiert, die resonant zur TEM₀₀-Mode des Resonators sind.

Das Lichtfeld, das diese Photonen im Resonator ausbilden, ist unseren Simulationen zufolge eine vielversprechende Signatur des Dämpfungsmechanismus. Um dieses messen zu können, muss ein Einzelphotonenzähler aufgebaut und charakterisiert werden.

Außerdem gibt es eine wichtige offene Frage, die bald beantwortet werden sollte: Im Hamiltonoperator (2.5), aus dem wir die Bewegungsgleichungen zur Beschreibung unseres Systems herleiten, wird der Rückstoß, den die Atome bei der Absorption des eingestrahlteten Lichts und Emission der Photonen in den Resonator erfahren, nicht berücksichtigt. Ob diese Ver-

nachlässigkeit in der Realität tatsächlich gerechtfertigt werden kann, ist fraglich. Das Umstreuen von Photonen beim Übergang in einen anderen Hyperfeinzustand ist nichts anderes als Ramanstreuung, bei der man eine superradiante Verstärkung der Materiewelle beobachtet [Schneble *et al.* 2004, Yoshikawa *et al.* 2004]. Bei einer Einstrahlung senkrecht zur langen Achse des Kondensats werden die Photonen verstärkt entlang dieser Achse umgestreut und es bilden sich zwei Rückstoßpeaks innerhalb der Atomwolke aus.

Der große Unterschied unseres Experiments ist die Anwesenheit des optischen Resonators, in dessen Mode die Photonen gestreut werden. Wie dieser sich auf die Superradianz auswirkt, wurde bislang noch nicht untersucht, bietet aber mit Sicherheit interessante Effekte. Diese können in naher Zukunft in Experimenten mit und ohne überlagerte Hyperfeinzustände untersucht werden.

A Zeitentwicklung der Feldoperatoren

Im Folgenden soll die zeitliche Entwicklung der Feldoperatoren aus dem Hamiltonoperator (2.5) hergeleitet werden. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, zerlegt man diesen in vier Teile,

$$H = H_{BEC1} + H_{BEC2} + H_{2ph} + H_c, \quad (\text{A.1})$$

und berechnet die einzelnen Kommutatoren separat,

$$\dot{\hat{\Psi}}_1 = \frac{i}{\hbar} \left([\hat{H}_{BEC1}, \hat{\Psi}_1] + [\hat{H}_{BEC2}, \hat{\Psi}_1] + [\hat{H}_{2ph}, \hat{\Psi}_1] + [\hat{H}_c, \hat{\Psi}_1] \right). \quad (\text{A.2})$$

Für die Rechnung verwendet man die Kommutatorrelation

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (\text{A.3})$$

Da

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.4})$$

gilt, verschwinden die Integrale.

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{BEC1}, \hat{\Psi}_1] &= \int d\vec{r} \left[\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + \frac{u_{11}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) + \frac{u_{12}}{2} \hat{\Psi}_2^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}_1(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}') \right] \\ &= \int d\vec{r} \left[\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}') \right] \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + \frac{u_{11}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) + \frac{u_{12}}{2} \hat{\Psi}_2^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \\ &\quad + \int d\vec{r} \hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \frac{u_{11}}{2} [\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}')] \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \\ &= - \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + \frac{u_{11}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) + \frac{u_{12}}{2} \hat{\Psi}_2^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \\ &\quad - \frac{u_{11}}{2} \hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \\ &= - \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{11} |\hat{\Psi}_1(\vec{r})|^2 + \frac{u_{12}}{2} |\hat{\Psi}_2(\vec{r})|^2 \right) \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{BEC2}, \hat{\Psi}_1] &= \int d\vec{r} \hat{\Psi}_2^\dagger \frac{u_{21}}{2} [\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}')] \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \\ &= -\hat{\Psi}_2^\dagger \frac{u_{21}}{2} \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \\ &= -\frac{u_{21}}{2} |\hat{\Psi}_2(\vec{r})|^2 \hat{\Psi}_1(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_{2ph}, \hat{\Psi}_1] &= \int d\vec{r} \left(\hbar\Delta_{2ph} [\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}')] \hat{\Psi}_1(\vec{r}) + \frac{\hbar\Omega_{2ph}}{2} [\hat{\Psi}_1^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}_1(\vec{r}')] \hat{\Psi}_2(\vec{r}) \right) \\
&= -\hbar\Delta_{2ph} \hat{\Psi}_1(\vec{r}) - \frac{\hbar\Omega_{2ph}}{2} \hat{\Psi}_2(\vec{r})
\end{aligned}$$

$$[\hat{H}_C, \hat{\Psi}_1] = -\hbar g \hat{c} \hat{\Psi}_2(\vec{r})$$

Die Rechnungen für $\hat{\Psi}_2$ und \hat{c} erfolgen analog. Als Ergebnis für die Zeitentwicklung bekommt man ein System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\Psi}}_1 &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{11} |\hat{\Psi}_1|^2 + u_{12} |\hat{\Psi}_2|^2 \right) \hat{\Psi}_1 - i\Delta_{2ph} \hat{\Psi}_1 \\
&\quad - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} \hat{c} \right) \hat{\Psi}_2 \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_2 = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{12} |\hat{\Psi}_1|^2 + u_{22} |\hat{\Psi}_2|^2 \right) \hat{\Psi}_2 - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} \hat{c}^\dagger \right) \hat{\Psi}_1 \tag{A.6}$$

$$\dot{\hat{c}} = -i \int d\vec{r} g_{cv} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_2^\dagger - \left(i\Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) \hat{c} \tag{A.7}$$

B Vereinfachung der gekoppelten Differentialgleichungen

Im Folgenden werden die Gleichungen (2.14)-(2.16) hergeleitet. Dazu setzt man den Ansatz

$$\Psi_k(\vec{r}) = \sqrt{N_k(t)} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_k(t)} \quad (\text{B.1})$$

in die Gleichungen (2.6)-(2.8) ein. Man bekommt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{N_1} i\dot{\Phi}_1 + \frac{\dot{N}_1}{2\sqrt{N_1}} \right) \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_1} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{11} N_1 \varphi^2(\vec{r}) + u_{12} N_2 \varphi^2(\vec{r}) + \hbar \Delta_{2ph} \right) \\ &\cdot \sqrt{N_1} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_1} - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) \sqrt{N_2} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_2} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{N_2} i\dot{\Phi}_2 + \frac{\dot{N}_2}{2\sqrt{N_2}} \right) \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_2} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{12} N_1 \varphi^2(\vec{r}) + u_{22} N_2 \varphi^2(\vec{r}) \right) \\ &\cdot \sqrt{N_2} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_2} - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c^\dagger \right) \sqrt{N_1} \varphi(\vec{r}) e^{i\Phi_1} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$\dot{c} = -i \int d\vec{r} g_{cv} \sqrt{N_1 N_2} \varphi^2(\vec{r}) e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} - \left(i\Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) c. \quad (\text{B.4})$$

Zunächst multipliziert man Gleichung (B.2) mit $\sqrt{N_1} e^{-i\Phi_1}$ und Gleichung (B.3) mit $\sqrt{N_2} e^{-i\Phi_2}$. Außerdem setzt man das chemische Potential aus Gleichung (2.10) ein.

$$\begin{aligned} \left(N_1 i\dot{\Phi}_1 + \frac{\dot{N}_1}{2} \right) \varphi(\vec{r}) &= \left(-\frac{i}{\hbar} (\mu_1 + \hbar \Delta_{2ph}) N_1 - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} \right) \varphi(\vec{r}) \\ \left(N_2 i\dot{\Phi}_2 + \frac{\dot{N}_2}{2} \right) \varphi(\vec{r}) &= \left(-\frac{i}{\hbar} \mu_2 N_2 - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c^\dagger \right) \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} \right) \varphi(\vec{r}). \end{aligned}$$

Da sich $\varphi(\vec{r})$ mit der Zeit nicht ändert und außerdem normiert ist, $\int d\vec{r} \varphi^2(\vec{r}) = 1$, kann man es komplett aus den Gleichungen eliminieren, indem man von links mit $\varphi(\vec{r})$ multipliziert und über den Ort integriert. Die zweite Gleichung wird zusätzlich noch komplex konjugiert. Man bekommt:

$$N_1 i\dot{\Phi}_1 + \frac{\dot{N}_1}{2} = -i \left(\frac{\mu_1}{\hbar} + \Delta_{2ph} \right) N_1 - i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} \quad (\text{B.5})$$

$$-N_2 i \dot{\Phi}_2 + \frac{\dot{N}_2}{2} = i \frac{\mu_2}{\hbar} N_2 + i \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{c} = -i g_{cv} \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} - \left(i \Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) c \quad (\text{B.7})$$

Bildet man den Realteil der Summe $\frac{1}{iN_1}$ (B.5) + $\frac{1}{iN_2}$ (B.6) und der Differenz (B.6) – (B.5) bekommt man

$$\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\hbar} - \Delta_{2ph} + \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{N_1 N_2}} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{2} (\dot{N}_2 - \dot{N}_1) = -2 \sqrt{N_1 N_2} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} \right), \quad (\text{B.9})$$

da $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Im}(-z)$. Mit den Definitionen

$$\Phi \equiv \Phi_1 - \Phi_2 \quad (\text{B.10})$$

$$P_\Phi \equiv \frac{1}{2} (N_2 - N_1) \quad (\text{B.11})$$

$$N \equiv N_1 + N_2 \quad (\text{B.12})$$

bekommt man schließlich das Gleichungssystem

$$\dot{\Phi} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\hbar} - \Delta_{2ph} - \frac{4P_\Phi}{\sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2}} \Re e \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{-i\Phi} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{P}_\Phi = -\sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2} \Im m \left(\left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) e^{-i\Phi} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{c} = -\frac{i}{2} g_{cv} \sqrt{N^2 - 4P_\Phi^2} e^{i\Phi} - \left(i \Delta_{cv} + \frac{\kappa}{2} \right) c \quad (\text{B.15})$$

C Simulationsverfahren

Berechnung des Grundzustands: Steepest descent

Als Ausgangspunkt für die Simulation der gekoppelten Gleichungen (2.6)-(2.8) dient die Lösung der stationären eindimensionalen Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(z) + Nu_{1d}|\Psi(z)|^2\right)\Psi(z) = \mu\Psi(z). \quad (\text{C.1})$$

Die einfachste Methode zur numerischen Berechnung des Grundzustandes ist der „steepest descent“-Ansatz [Dalfovo und Stringari 1996]. Dabei wird eine Testfunktion so lange in imaginärer Zeit propagiert, bis der Grundzustand erreicht wird. Wir starten dabei mit einer normierten Gauss-Verteilung,

$$\Phi(z) = \frac{\exp\left(\frac{-z^2}{2z_{ho}^2}\right)}{\sqrt{\int \exp\left(\frac{-z^2}{2z_{ho}^2}\right) dz}}, \quad (\text{C.2})$$

$z_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$ ist die harmonische Oszillatorlänge. In jedem Iterationsschritt wird die Wellenfunktion

$$\Phi(z, t + \Delta t) \approx \Phi(z, t) - \Delta t H \Phi(z, t) \quad (\text{C.3})$$

berechnet und anschließend auf eins normiert. Die daraus resultierende Wellenfunktion dient als Startpunkt für alle weiteren Simulationen.

Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

Als Simulationsverfahren wählen wir das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Dazu schreiben wir die drei Wellenfunktionen als Spinor,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ c \end{pmatrix}.$$

Die Änderung der Wellenfunktionen innerhalb eines kleinen Zeitschrittes dt lässt sich dann schreiben als

$$K[\Psi] = -\frac{i}{\hbar} dt \begin{pmatrix} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{11} |\Psi_1|^2 + u_{12} |\Psi_2|^2 \right) \Psi_1 + \hbar \Delta_{2ph} \Psi_1 + \hbar \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c \right) \Psi_2 \\ \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V + u_{12} |\Psi_1|^2 + u_{22} |\Psi_2|^2 \right) \Psi_2 + \hbar \left(\frac{\Omega_{2ph}}{2} + g_{cv} c^* \right) \Psi_1 \\ \hbar \int d\vec{r}' g_{cv} \Psi_1 \Psi_2^* + \hbar \left(\Delta_{cv} - i \frac{\kappa}{2} \right) c \end{pmatrix}.$$

Für das Runge-Kutta-Verfahren berechnet man in jedem Iterationsschritt

$$\begin{aligned} \delta\Psi_a &= K[\Psi] \\ \delta\Psi_b &= K\left[\Psi + \frac{1}{2}\delta\Psi_a\right] \\ \delta\Psi_c &= K\left[\Psi + \frac{1}{2}\delta\Psi_b\right] \\ \delta\Psi_d &= K[\Psi + \delta\Psi_c]. \end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Ausgangswellenfunktion für den nächsten Iterationsschritt

$$\Psi' = \Psi + \frac{\delta\Psi_a}{6} + \frac{\delta\Psi_b}{3} + \frac{\delta\Psi_c}{3} + \frac{\delta\Psi_d}{6}. \quad (\text{C.4})$$

D Stromstabilisierung zum Verschieben der Atome in die Resonatormode

Die Präparation unseres Bose-Einstein Kondensats findet nicht in der Resonatormode sondern seitlich oberhalb davon statt. Um Experimente mit kalten Atomen im Ringresonator durchzuführen, müssen wir daher die Atomwolke noch räumlich versetzen. Für die vertikale Richtung ändern wir die Quadrupolströme, für die horizontale Verschiebung passen wir den Strom in einer Kompensationsspule außerhalb der Vakuummkammer an. Um den Kompensationsstrom computergesteuert per ADWIN innerhalb des Zyklus ändern zu können, wurde eine Stromstabilisierung aufgebaut. Abbildung D.1 zeigt den Schaltplan der Schaltung.

Der aktuelle Strom, der durch die Kompensationsspule fließt, wird mit einem Transducer (Ultrastab 867-200I von Danfysik) gemessen. Dieser gibt eine Stromstärke aus, die über den 10 k Ω -Widerstand in eine Spannung umgewandelt und mit dem von ADWIN vorgegebenen Sollwert verglichen wird.

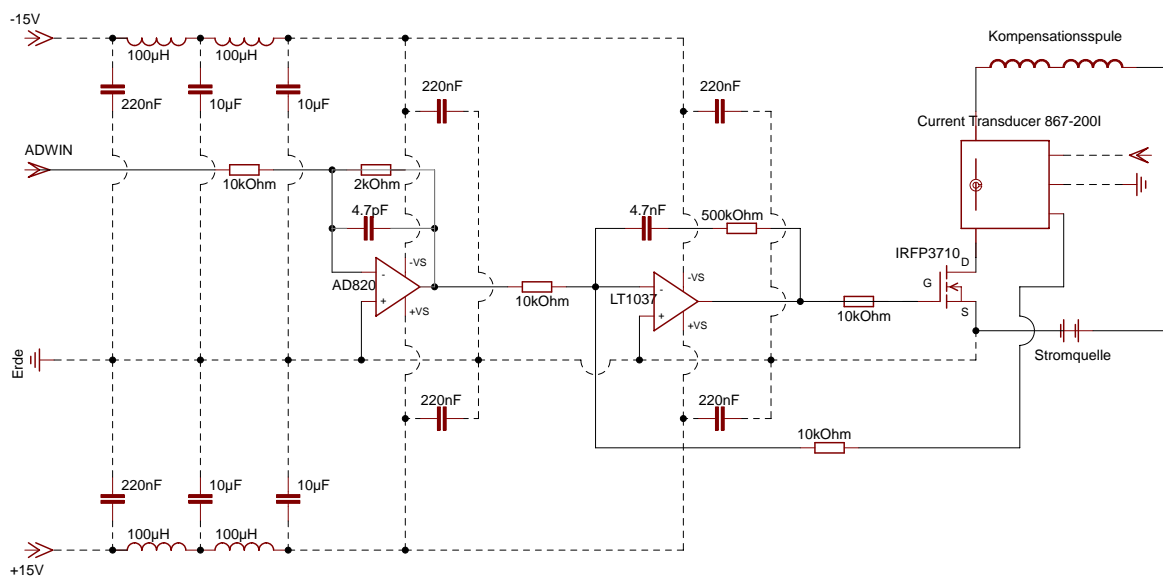


Abbildung D.1: Schaltplan der Stromstabilisierung. Die Zuleitungen für die Spannungsversorgung der Operationsverstärker sowie die Masseleitung sind gestrichelt dargestellt.

Weichen sie voneinander ab, greift die PI-Regelung und wirkt über die Gate-Spannung des eingebauten MOSFETs auf den Stromkreis ein. Um den Stromfluss durch die Spule beobachten zu können, ohne durch einen Messwiderstand die Schaltung zu beeinflussen, wird das Signal des Transducers über einen Spannungsfolger ausgelesen (dieser ist nicht in den Schaltplan eingezeichnet). Über dieses Monitor-Signal wird die Reaktion des Stromes auf ein am ADWIN-Eingang angelegtes Rechteck-Signal betrachtet, um die Regelung zu optimieren und die Geschwindigkeit der Schaltvorgänge zu messen. Kapazität und Widerstand werden so gewählt, dass beim Ein- und Ausschalten keine Überschwinger auftreten. Damit kann die Stromquelle innerhalb von $100\ \mu\text{s}$ glatt ausgeschaltet werden. Abbildung D.2 zeigt den Stromverlauf beim langsamen Ein- und schnellen Ausschalten der Stromquelle.

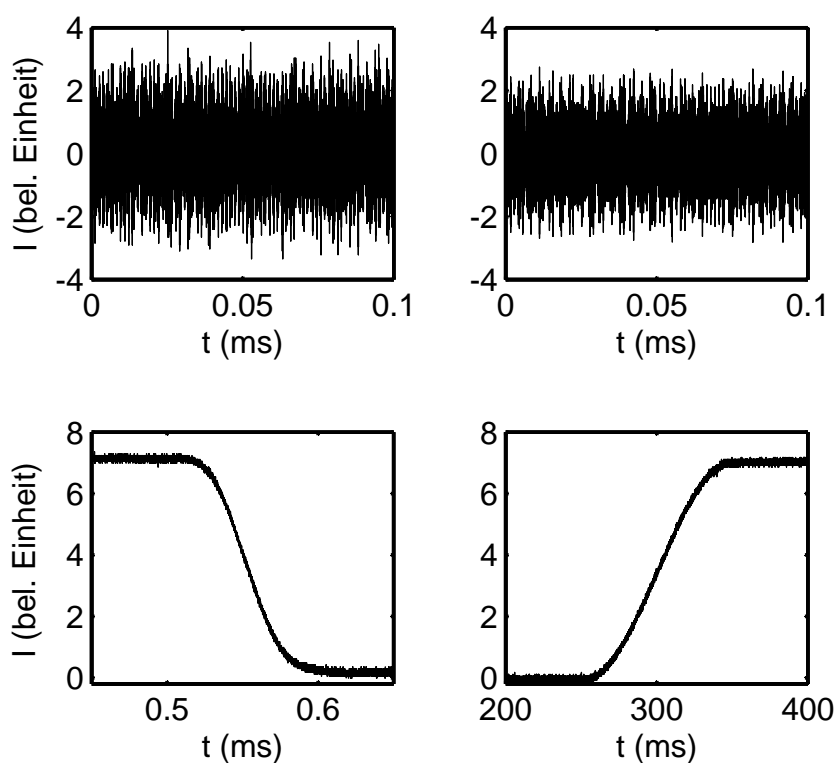


Abbildung D.2: Oben: Rauschen der Stromquelle ohne (links) und mit (rechts) Stabilisierung. Unten: Stromverlauf der stabilisierten Stromquelle beim Ausschalten in $100\ \mu\text{s}$ (links) und Einschalten in $100\ \text{ms}$ (rechts).

Literaturverzeichnis

- [Anderson und Kasevich 1998] B. P. Anderson und M. A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science* **282**, 1686–1689, **1998**.
- [Anderson *et al.* 1995] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science* **269**, 198–201, **1995**.
- [Andrews *et al.* 1997] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle. Observation of interference between two Bose condensates. *Science* **275**, 637–641, **1997**.
- [Bao *et al.* 2003] W. Bao, D. Jaksch und P. A. Markowich. Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose-Einstein condensation. *J. Comput. Phys.* **187** (1), 318–342, **2003**.
- [Bergmann *et al.* 1998] K. Bergmann, H. Theuer und B. W. Shore. Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.* **70** (3), 1003–1025, **1998**.
- [Black 2001] E. D. Black. An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization. *Am. J. Phys.* **69**, 79–87, **2001**.
- [Bloch *et al.* 1999] I. Bloch, T. W. Hänsch und T. Esslinger. Atom Laser with a cw Output Coupler. *Phys. Rev. Lett.* **82** (15), 3008–3011, **1999**.
- [Bose 1924] S. N. Bose. *Z. Phys.* **26**, 178, **1924**.
- [Buchmann *et al.* 2009] L. F. Buchmann, G. M. Nikolopoulos und P. Lambropoulos. Role of the relative phase in the merging of two independent Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **79** (1), 013631, **2009**.
- [Bux 2007] S. Bux. Zweimodenstabilisierung auf einen optischen Ringresonator zur Vermeidung von Strahlungsdruck. Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, **2007**.
- [Chikkatur *et al.* 2002] A. P. Chikkatur, Y. Shin, A. E. Leanhardt, D. Kielpinski, E. Tsikata, T. L. Gustavson, D. E. Pritchard und W. Ketterle. A continuous source of Bose-Einstein condensed atoms. *Science* **296** (5576), 2193, **2002**.

- [Cohen-Tannoudji *et al.* 1998] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg. Atom-photon interactions. John Wiley & Sons, New York, **1998**.
- [Dalfovo *et al.* 1999] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii und S. Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* **71** (3), 463–512, **1999**.
- [Dalfovo und Stringari 1996] F. Dalfovo und S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Phys. Rev. A* **53** (4), 2477–2485, **1996**.
- [Einstein 1924] A. Einstein. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **22**, 261, **1924**.
- [Gentile *et al.* 1989] T. R. Gentile, B. J. Hughey, D. Kleppner und T. W. Ducas. Experimental study of one- and two-photon Rabi oscillations. *Phys. Rev. A* **40** (9), 5103–5115, **1989**.
- [Günther 2006] S. Günther. Wechselwirkungen kalter Li-Rb-Gase im entarteten Regime. Doktorarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, **2006**.
- [Guerin *et al.* 2006] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer und A. Aspect. Guided quasicontinuous atom laser. *Phys. Rev. Lett.* **97** (20), 200402, **2006**.
- [Hagley *et al.* 1999] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston und W. D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science* **283**, 1706–1709, **1999**.
- [Jaksch *et al.* 2001] D. Jaksch, S. A. Gardiner, K. Schulze, J. I. Cirac und P. Zoller. Uniting Bose-Einstein condensates in optical resonators. *Phys. Rev. Lett.* **86** (21), 4733–4736, **2001**.
- [Jo *et al.* 2007] G.-B. Jo, J.-H. Choi, C. A. Christensen, T. A. Pasquini, Y.-R. Lee, W. Ketterle und D. E. Pritchard. Phase-Sensitive Recombination of Two Bose-Einstein Condensates on an Atom Chip. *Phys. Rev. Lett.* **98** (18), 180401, **2007**.
- [Ketterle 2002] W. Ketterle. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Rev. Mod. Phys.* **74** (4), 1131–1151, **2002**.
- [Köhl *et al.* 2001] M. Köhl, T. W. Hänsch und T. Esslinger. Measuring the temporal coherence of an atom laser beam. *Phys. Rev. Lett.* **87** (16), 160404, **2001**.
- [Koglenik und Li 1966] H. Koglenik und T. Li. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.* **5**, 1550–1567, **1966**.
- [Krenz 2010] G. Krenz. Dynamik kalter Atome in einem nichtresonant betriebenen optischen Ringresonator hoher Güte: Dämpfung und Modenunterdrückung. Doktorarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, **2010**.

- [Maiman 1960] T. H. Maiman. Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature* **187**, 493–494, **1960**.
- [Matthews 1999] M. R. Matthews. Two-component Bose-Einstein condensation. Doktorarbeit, Graduate School of the University of Colorado, **1999**.
- [Mayer-Kuckuk 1994] T. Mayer-Kuckuk. Atomphysik. Teubner-Studienbücher: Physik, Stuttgart, **1994**.
- [Meschede 2008] D. Meschede. Optik, Licht und Laser, 3. Auflage. Vieweg+Teubner GWV Fachverlag GmbH, Wiesbaden, **2008**.
- [Mewes *et al.* 1997] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend und W. Ketterle. Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms. *Phys. Rev. Lett.* **78** (4), 582–585, **1997**.
- [O’Keefe und Deacon 1988] A. O’Keefe und D. A. Deacon. Cavity ring-down optical spectrometer for absorption measurements using pulsed laser sources. *Rev. Sci. Instrum.* **59**, 2544–2551, **1988**.
- [Poirson *et al.* 1997] J. Poirson, F. Bretenaker, M. Vallet und A. Le Floch. Analytical and experimental study of ringing effects in a Fabry-Perot cavity. Application to the measurement of high finesse. *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 2811–2817, **1997**.
- [Ramsey 1950] N. F. Ramsey. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields. *Phys. Rev.* **78**, 695–699, **1950**.
- [Robins *et al.* 2008] N. Robins, C. Figl, M. Jeppesen, G. Dennis und J. Close. A pumped atom laser. *Nature Physics* **4** (9), 731–736, **2008**.
- [Robins *et al.* 2006] N. P. Robins, C. Figl, S. A. Haine, A. K. Morrison, M. Jeppesen, J. J. Hope und J. D. Close. Achieving peak brightness in an atom laser. *Phys. Rev. Lett.* **96** (14), 140403, **2006**.
- [Schneble *et al.* 2004] D. Schneble, G. K. Campbell, E. W. Streed, M. Boyd, D. E. Pritchard und W. Ketterle. Raman amplification of matter waves. *Phys. Rev. A* **69** (4), 041601, **2004**.
- [Slama 2007] S. Slama. Ultrakalte Atome in einem optischen Ringresonator: vom kollektiven atomaren Rückstoß-Laser zu superradianter Rayleigh-Streuung. Doktorarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, **2007**.
- [Slama *et al.* 2007] S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann und P. W. Courteille. Super-radiant Rayleigh scattering and collective atomic recoil lasing in a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.* **98** (5), 053603, **2007**.

- [Smerzi *et al.* 1997] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi und S. R. Shenoy. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **79** (25), 4950–4953, **1997**.
- [Steck 2003] D. A. Steck. "Rubidium 87 D line data", online erhältlich unter <http://steck.us/alkalidata>. *Los Alamos National Laboratory*, **2003**.
- [Öttl *et al.* 2005] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl und T. Esslinger. Correlations and counting statistics of an atom laser. *Phys. Rev. Lett.* **95** (9), 090404, **2005**.
- [Vutha 2010] A. C. Vutha. A simple approach to the Landau-Zener formula. *Eur. J. Phys.* **31** (2), 389, **2010**.
- [Williams *et al.* 1999] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. Cornell und M. Holland. Nonlinear Josephson-type oscillations of a driven, two-component Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* **59** (1), R31–R34, **1999**.
- [Williams *et al.* 2000] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. A. Cornell und M. Holland. Excitation of a dipole topological state in a strongly coupled two-component Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* **61** (3), 033612, **2000**.
- [Yoshikawa *et al.* 2004] Y. Yoshikawa, T. Sugiura, Y. Torii und T. Kuga. Observation of superradiant Raman scattering in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* **69** (4), 041603, **2004**.
- [Zener 1932] C. Zener. Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proc. R. Soc. Lond. A* **137**, 696–702, **1932**.

Danksagung

An erster Stelle herzlichen Dank an Professor Claus Zimmermann, der mir die Diplomarbeit in seiner Arbeitsgruppe ermöglichte. Seine offene und kameradschaftliche Art ermutigte mich, auch dumme Fragen zu stellen und von seinem Fachwissen zu profitieren. Es machte immer wieder Spaß, sich von seiner Begeisterung für die Physik anstecken zu lassen.

Ein riesiges Dankeschön gebührt unserem (ehemaligen) Projektleiter Professor Philippe Courteille, der seit Anfang dieses Jahres das tropische Klima Brasiliens unserer Gesellschaft vorzieht. Mit seinem „Bastelpraktikum“ lieferte er die letzte Überzeugungsarbeit, meine Diplomarbeit im Gebiet der Quantenoptik anzufertigen. Bei allen kleineren und größeren Problemen im Labor und mit der Theorie stand er uns mit guten Ratschlägen, neuen Ideen und Schokolade zur Seite und hatte auch über eine Entfernung von 9 600 Kilometern für alle Fragen ein offenes Ohr. Dank seiner Erklärungen habe ich in diesem Jahr viel dazugelernt. Auch für seinen Humor, der die Zusammenarbeit zum Vergnügen machte, möchte ich mich bei ihm bedanken. Für den Neubeginn in Brasilien wünsche ich ihm alles Gute!

Dadurch, dass sie mich zum Mitmachen im Barockorchester „Collegium Illustre“ und der Physik-Fachschaft animierte, hatte Simone Bux schon vor der Diplomarbeit Einfluss auf mein Studienleben. Als Kollegin im „Frauenlabor“ war sie nun eine geduldige Lehrerin, mit der ich viele gemeinsame Stunden im Labor verbrachte. Sie half mir, mich im Spiegelwald eines optischen Tisches zurechtzufinden und weihte mich in die Geheimnisse des „Ti:Sa-Lockens“ ein. Merci bien für die tolle Zusammenarbeit, die immer viel Spaß gemacht hat!

Auch der Rest des „fünften Stocks“ hat mit einem freundschaftlichen und hilfsbereiten Klima für ein schönes Diplomarbeitjahr gesorgt. Vielen Dank dafür!

Sei es beim Ausfüllen von Reisekostenanträgen, der Abgabe von Rechnungen oder dem Beschaffen von Druckerpatronen, in allen bürokratischen Dingen konnte man sich stets auf die Sekretärinnen Frau Lossa, Frau Eiskant und Frau Walz verlassen. Dankeschön!

Ein großer Dank geht auch an Herrn Schreyer und seine Kollegen von der Elektronikwerkstatt, die mir beim Lötten meiner ersten eigenen Schaltung mit guten Tipps beiseite standen und fehlende Bauteile, Kabel oder Stromquellen immer schnell beschafften.

Seit dem ersten Tag des Mathe-Vorkurses hat mich Hannah Tomczyk durch die Hochs und Tiefs des Studiums begleitet. Nicht einmal Auslandsaufenthalte konnten uns von gemeinsamen kreativen, albernem, sinnlosen, unheimlich tollen Projekten abhalten. Für die vielen versungenen und verplauderten Stunden, die gemeinsamen Urlaube und Übungsblätter, für das Korrekturlesen dieser Arbeit und vieles mehr möchte ich mich bei dieser Freundin der ersten Stunde bedanken.

Er wurde während dieses Jahres of zugunsten seines Namensvetters vernachlässigt - und trotzdem hat er mich vor dem Verhungern bewahrt und meine Launen in stressigen Zeiten nicht nur ertragen sondern wundersamerweise ausgeglichen. Takk fyrir, Karl Urban!

Meinen Eltern Joachim und Ute Gnahn danke ich dafür, dass sie mich in all meinen Ideen und Plänen auf dem Weg ins Leben unterstützt haben und mir dieses Studium ermöglichten. Ihr habt mir die wichtigsten Eigenschaften mitgegeben, die für das Gelingen dieser Arbeit notwendig waren: Phantasie, Neugierde und die Begeisterung für das Basteln in jeder Form. Grazie mille!

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt habe.

Tübingen, den 3. Mai 2010